

[ *All rights reserved for ever by the publisher.* ]

Publisher.

J. N. Yadaḡa Proprietor, Master Kheḡarilal & Sons,  
Sanskrit Book-Depot, Kachaurigall, Benares City.

Printer.

Om Prakash Kapoor, Shri Lakshmi Narayan Press,  
Jatanbar, Benares City.

ॐ श्रीः ॐ

# चलन कलन

अध्याय १-१०

---

लेखक—

महामहोपाध्याय पं० सुधाकर द्विवेदी

---

सम्पादक—

पद्माकर द्विवेदी, ज्यौतिषाचार्य,  
भूतपूर्व ज्यौतिषशास्त्र प्रधानाध्यापक,  
राजकीय प्रधानसंस्कृत कालेज,  
काशी ।

---

प्रकाशक—

मास्टर खेलाड़ीलाल ऐराड सन्स,  
संस्कृत बुकडिपो,  
कचौड़ी गली, बनारस सिटी ।

---

१९४१ ई०

---

मूल्य २।।) ६०

प्रकाशक—

जे० एन्० यादव

मास्टर रोलाड़ी लाल ऐण्ड सन्स्

सस्कृत बुकडिपो, कवीबोगली, काशी ।

( सर्वाधिकार सुरक्षित प्रकाशक की ओर से )



२१६-४१

1

मुद्रक—

श्री० प्र० कपूर,

श्रीलक्ष्मीनारायण प्रेस,

जगतनगर, बनारस ।

॥ श्रीगणेशाय नमः ॥

विबुध विविधभेदा बीजजाताः प्रसिद्धा-  
बहुभिरपरदेशस्थैर्जनैस्सन्ति तेषु ।  
चलनकलनसंज्ञं वच्मि चित्रं प्रणम्य  
जनकनृपतनूजां कोशलेन्द्रस्य सूनुम् ॥

## चलनकलन ।

### अध्याय १ ।

चलराशियों के योग, अन्तर, गुणनफल, और लब्धिसम्बन्धि-  
तात्कालिकसम्बन्ध के विषय में ।

१ । दो ऐसे राशि हों कि एक के परिवर्तन से दूसरे का भी परि-  
वर्तन हो जाय तो एक राशि दूसरे राशि का फल कहलाता है, जैसे  
यदि,  $y^n = r$  और जब,  $y$  बदल के  $y + च$  हो तब  $(y + च)^n = r^1$  तो  
 $r$  को  $y$  का फल कहेंगे । और  $y$  को स्वतंत्रराशि  $r$  को अस्वतंत्रराशि  
कहते हैं क्योंकि  $r$  का चलन यहाँ  $y$  के आधीन है ।

२ । जब,  $y^n = r$  इस लिये  $y = r^{\frac{1}{n}}$  और  $(y + च)^n = r^1$  इस  
लिये  $y + च = y^1 = r^{\frac{1}{n}}$  इससे यह सिद्ध होता है कि एक को अपेक्षा  
दूसरा स्वतंत्र वा अस्वतंत्र हो सकता है ।

३ । जैसे बीजगणित में अव्यक्त राशिओं का मान  $y, r, ल, व$   
इत्यादि अक्षरों से दिखाए जाते हैं वही तरह से यहाँ चल राशिओं के  
मान  $y, r, ल, व$  इत्यादि अक्षरों से लिखते हैं और बीजगणित की तरह  
 $अ, क, ग$  इत्यादि अक्षरों से यहाँ स्थिरसंख्या का मान लिखते हैं ।

४ । जब  $r = y^4 + 3y^3 + 2$ , वा,  $r = y^3 + 2y^3 + 1$  इत्यादि, तो इनको लापव के लिये  $r = फ (य)$  वा,  $r = फि (य)$  ऐसा लिखते हैं। यह, फ, फि, फा, इत्यादि अक्षर य के फल को द्योतन करते हैं।  $r = फ (य)$  यह दिखलाता है कि र के मान में केवल य चलाशिश है और सब स्थिर हैं।

५ । देखो—यदि  $y^3 = r$  ऐसा समीकरण हो और कल्पना करो कि य का चलन च के तुल्य हुआ तब र का दूसरा मान  $= (य + च)^3$  इस लिये य के च तुल्य चलन में र का चलन  $= (य + च)^3 - y^3$  होगा इसे ऐसा लिखते हैं  $\Delta r = (य + च)^3 - y^3$  और च को  $\Delta y$  यों लिखते हैं। यहाँ  $= (य + च)^3 - y^3 = 3y^2 च + 3य च^2 + च^3 = \Delta r$ , दोनों पक्षों में च का भाग देने से  $3y^2 + 3य \times च + च^2 = \frac{\Delta r}{\Delta y}$ , य के रूप तुल्य चलन में र का चलन सिद्ध हुआ। परन्तु यह र का चलन जो अभी त्रैराशिक से सिद्ध हुआ है, च का मान भिन्न भिन्न होने से भिन्न भिन्न होगा इस लिये यदि च को शून्य के तुल्य मानो तो र का चलन,  $3y^2$  होगा।  $3y^2$  इसको य के रूप तुल्य चलन में र का एकरूप चाल से, तात्कालिकचलन वा तात्कालिकगति कहते हैं। और इस को इष्ट य के तात्कालिकचलन से गुण देने से इष्ट य के तात्कालिकचलन में एकरूप चाल से र का तात्कालिकचलन होगा अर्थात्  $ताय \cdot 3y^2 = तार \therefore 3y^2 = \frac{तार}{ताय}$  अर्थात्  $3y^2$ , को तात्कालिकसम्बन्ध भी कहते हैं।

६ । चलनफलन का मुख्य प्रयोजन यही है कि एक के तात्कालिकचलन से दूसरे का तात्कालिकचलन ज्ञातना। और पूर्व प्रक्रम में जो  $3y^2$  इस का नाम र का तात्कालिकचलन रक्खा गया है वह ठीक है क्योंकि जैसा जैसा च का मान थोड़ा कल्पना किया जाय वैसा वैसा  $y^3$  वा, र, के पास पास के चाल से र चलेगा इस लिये यदि च को शून्य मानो तो ठीक, र वही समय के चाल से चलेगा।

७ । इस चलनकलन में चलराशि और स्थिरराशि के कहने से ऐसा समझना चाहिए कि, जैसा दो समानान्तर रेखा के बीच तुल्य आधार पर जितने त्रिभुज होंगे उन का क्षेत्रफल तो स्थिर परन्तु कोण चलराशि अथवा वृत्तान्तगत एक ही आधार पर एक ही ओर जितने त्रिभुज होंगे उन का शिरःकोण स्थिरराशि और फल चलराशि होगा इसी तरह हर एक जगह स्थिर और चल का अर्थ समझना चाहिये ।

८ । पाँचवें प्रक्रम से यह बात सिद्ध होती है कि स्वतंत्रराशि का च तुल्य चलन मान के अस्वतंत्रराशि का मान ले आओ फिर पूर्व अस्वतंत्रराशि और नवीन अस्वतंत्रराशि के अन्तर में च का भाग देके च को शून्य के तुल्य उत्थापन देने से तात्कालिकसम्बन्ध होता है

$$\text{जैसे यदि } f(y) = y^2$$

$$\text{तो } f(y + c) = y^2 + 2yc + c^2$$

और  $f(y + c) - f(y) = 2yc + c^2$  इसमें च का भाग देने से और च को शून्य मानने से  $\frac{f(y^2)}{c} = 2y$  यह, य के गति के वश  $y^2$  के गति का तात्कालिकसम्बन्ध हुआ इसी तरह यदि

$$f(y) = \frac{ax}{y+k} \text{ तो } f(y+c) = \frac{ax}{y+c+k}$$

इन दोनों का अन्तर  $= f(y+c) - f(y) = \frac{-ax \cdot c}{(y+k)(y+c+k)}$   
इसमें च का भाग देकर च को शून्य के तुल्य करने से तात्कालिकसम्बन्ध  $\frac{-ax}{(y+k)}$  इसके तुल्य हुआ, इसी रीति से हर एक जगह तात्कालिक सम्बन्ध निकालना चाहिये ।

९ । जैसे व्यक्तगणित और अव्यक्तगणित में जोड़ने वा घटाने की सुगम रीति गुणन, वर्ग, घन, वा भजन, वर्गमूल, घनमूल इत्यादि बुद्धिमानों ने बनाया है उसी तरह इस चलनकलन में चलराशियों के तुरन्त तात्कालिकसम्बन्ध जानने के लिये बुद्धिमानों ने अनेक चलराशियों के तात्कालिकसम्बन्ध निकाल निकाल कर उनके प्रकारों को

लिखे हैं जिनके अभ्यास से पढ़नेवाले सब प्रकार के चलराशियों का तात्कालिकसम्बन्ध जान सकते हैं ।

प्रथम सिद्धान्त ।

जब कि  $r = स्थि \cdot फ ( य )$

इस लिये  $= r + \Delta r = स्थि \cdot फ ( य + \Delta य )$

$\Delta r = स्थि \{ फ ( य + \Delta य ) - फ ( य ) \}$

वा,  $\frac{\Delta r}{\Delta य} = स्थि \left\{ \frac{फ ( य + \Delta य ) - फ ( य )}{\Delta य} \right\}$

$\Delta य$  इसको शून्य के तुल्य करने से

$\frac{तार}{ताय} = स्थि \times तासं \circ फ ( य )$

इससे यह सिद्ध होता है कि जो चलराशि का तात्कालिकसम्बन्ध हो उसे स्थिरसंख्या से गुण देने से स्थिरसंख्यागुणित चलराशि का सम्बन्ध होता है ।

द्वितीय सिद्धान्त ।

यदि  $r = ल + व + स$  यहाँ पर, ल, व, स, य के भिन्न-भिन्न फल हैं।

तो,  $r = ल + व + स$  इसलिये  $\Delta r = \Delta ल + \Delta व + \Delta स$

वा  $\frac{\Delta r}{\Delta य} = \frac{\Delta ल}{\Delta य} + \frac{\Delta व}{\Delta य} + \frac{\Delta स}{\Delta य}$  वा,  $\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय} + \frac{ताव}{ताय} + \frac{तास}{ताय}$

इससे यह सिद्ध होता है कि सब फलों के पृथक् पृथक् तात्कालिक-सम्बन्धों का योग इन फलों के योग तुल्य चलराशि का तात्कालिक-सम्बन्ध होता है ।

इसी में यदि,  $r = ल + व - स$  हो तो पूर्वोक्त युक्ति से

$\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय} + \frac{ताव}{ताय} - \frac{तास}{ताय}$  ऐसा होगा

और यदि  $r = ल + स्थि$  के तो पूर्वोक्त युक्ति से

$\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय} + \frac{तास्थि}{ताय}$  परन्तु,  $\frac{तास्थि}{ताय} = 0$  होगा क्योंकि स्थिर-

संख्या का तात्कालिकचलन शून्य होता है इसलिये तात्कालिकसम्बन्ध भी शून्य होगा ।

$$\text{तब } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \text{ ऐसा होगा ।}$$

तृतीय सिद्धान्त ।

$$\text{यदि } r = \text{ळ} \times \text{व} = \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य})$$

$$\text{तो } r' = \text{फ}(\text{य} + \text{च}) \times \text{फि}(\text{य} + \text{च})$$

$$\begin{aligned} \Delta r &= \text{फ}(\text{य} + \text{च}) \times \text{फि}(\text{य} + \text{च}) - \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य}) \\ &= \text{फ}(\text{य} + \text{च}) \times \text{फि}(\text{य} + \text{च}) - \text{फ}(\text{य} + \text{च}) \times \text{फि}(\text{य}) \\ &\quad + \text{फ}(\text{य} + \text{च}) \times \text{फि}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \frac{\Delta r}{\Delta \text{य}} &= \left\{ \text{फ}(\text{य} + \text{च}) \right\} \left\{ \frac{\text{फि}(\text{य} + \text{च}) - \text{फि}(\text{य})}{\text{च}} \right\} \\ &\quad + \left\{ \text{फि}(\text{य}) \right\} \left\{ \frac{\text{फ}(\text{य} + \text{च}) - \text{फ}(\text{य})}{\text{च}} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{पूर्व विधि से } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{फ}(\text{य}) \times \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} + \text{फि}(\text{य}) \times \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}}$$

इसी युक्ति से यदि  $r = \text{ळ} \times \text{व} \times \text{स}$  तो

$$r = \text{श} \times \text{स} \quad \text{यहाँ } \text{श} = \text{ळ} \times \text{व}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} \times \text{स} + \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \times \text{श}$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \times \text{व} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} \times \text{ळ}$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \times \text{व} \cdot \text{स} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} \times \text{ळ} \cdot \text{स} + \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \times \text{ळ} \cdot \text{व}$$

इसी तरह यदि  $r = \text{ळ} \cdot \text{व} \cdot \text{श} \cdot \text{प}$

$$\text{तो } r = \text{ह} \times \text{प} \quad \text{यहाँ } \text{ह} = \text{ळ} \cdot \text{व} \cdot \text{श}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \cdot \text{प} + \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}} \cdot \text{ह}$$



$$\text{परन्तु } \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \times \text{व.श} + \frac{\text{साव}}{\text{ताय}} \times \text{ळ.श} + \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} \times \text{ळ.व}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \times \text{व.श.प} + \frac{\text{साव}}{\text{ताय}} \times \text{ळ.श.प} \\ + \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} \times \text{ळ.व.प} + \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}} \times \text{ळ.व.श}$$

इसी रीति से और भी जानना सब सिद्ध हो जायगा कि एक एक फल के तात्कालिकसम्बन्ध को और और फलों से गुण कर योग करना तो सब फलों के घात से जो राशि होगी उसका तात्कालिक सम्बन्ध होता है ।

चौथा सिद्धान्त ।

$$\text{यदि } r = \frac{व}{ळ} \text{ तो } व = r \times \text{ळ}$$

$$\text{तब तीसरे सिद्धान्त से } \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{ळ} + \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \cdot r$$

$$\text{वा, } \text{ळ} \times \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \cdot r + \frac{\text{साव}}{\text{ताय}}, \text{ वा}$$

$$\frac{\text{साव}}{\text{ताय}} \cdot \text{ळ} - \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \cdot \text{व} = \text{ळ}^2 \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\frac{\text{साव}}{\text{ताय}} \cdot \text{ळ} - \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}} \cdot \text{व}}{\text{ळ}^2} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{ इससे यह सिद्ध होता है कि}$$

भाज्य के तात्कालिकसम्बन्ध को हर से गुणा कर उस में हर के तात्कालिकसम्बन्ध को भाज्य से गुणा कर घटा दो शेष में हर के वर्ग का भाग देने से उस लघितुल्य चलराशि का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

१०। इस प्रश्न में विद्यार्थियों के अभ्यास के लिये चारो सिद्धान्त से चत्वार फल को टिपते हैं ।

$$r = \text{विव.ळ} \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{विव.} \frac{\text{ताळ}}{\text{ताय}}$$

$$r = ल + व \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}$$

$$r = ल - व \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}$$

$$r = ल \pm स्थि \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$

$$r = ल \times व \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} व + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} ल$$

$$r = \frac{व}{ल} \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \left( \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} ल - \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} व \right) \div ल^2$$

$$r = \frac{व}{स्थि} \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताव}}{\text{तायस्थि}}$$

इन के स्मरणार्थ श्लोक और दोहे धना कर लिख देते हैं ।

श्लोक

तात्कालिकाख्यसम्बन्धःस्थिरन्नविहृतो भवेत् ।

चलराशेस्स सम्बन्धस्थिरन्नविहृतस्य वै ॥

दोहा ।

स्थिरसंख्या से गुणित वा भाजित जो सम्बन्ध ।

सो स्थिर से संगुणित वा भाजित चलसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धयोगो विद्वन् भवेत् सदा ।

चलराशियुतेराशेस्सम्बन्धः किल संफुटः ॥

दोहा ।

चलराशोसम्बन्ध को योग करो तत्काल ।

चलराशिन के योग को सो सम्बन्ध निकाल ॥

श्लोक ।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धविवरं भवति ध्रुवम् ।

चलराशिवियोगस्य सम्बन्धञ्चलयुक्तिः ॥

दोहा ।

चलराशीसम्बन्ध को अन्तर करो तुरन्त ।

चलराशिन के विवर को सो सम्बन्ध नितान्त ॥

श्लोक ।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धावन्योन्यचलघंहतौ ।

तद्युतिश्चलघातस्य सम्बन्धो भवति ध्रुवम् ॥

दोहा ।

निज विहाय चल से गुणो निज सम्बन्ध निहार ।

ताको युति चलघात को सो सम्बन्ध विचार ॥

श्लोक ।

लवसम्बन्धगुणितो हरो हीनो लवेन सः ।

हरसम्बन्धनिम्नेन हरवर्गहृतः फलम् ॥

भिन्नस्य तस्य राशेस्त्यात् सम्बन्धस्ततत् ततः ।

द्यात्रैरेतत्सदा चिन्त्यं निजबुद्धिविबुद्धये ॥

दोहा ।

लवसम्बन्ध गुणा करो हर से देहु घटाय ।

तामें हरसम्बन्ध अरु अंश घात हरताय ॥

हर के वर्ग से भाग दो जो लब्धी मिल जाय ।

भिन्नरूपचलराशि को धो सम्बन्ध कहाय ॥

अध्यासार्थं प्रश्न ।

$$(१) r = ८ y + ४ \text{ इसका तात्कालिकसम्बन्ध कहो } \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ८ ।$$

$$(२) r = २ (y + ३) + ३ (y + ४) \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ५ ।$$

$$(३) r = (७ y + ५) (५ y + २) \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ७० y + ३९ ।$$

$$(४) r = \frac{५ y + ३}{१०} \dots \dots \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{२} ।$$

$$(५) r = \frac{११ y + ७}{१३ y + ११} \dots \dots \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{३०}{(१३ y + ११)^२} ।$$

उदाहरण ।

(१) एक पुरुष को पन्द्रह कोश जाना था उसने पहिले घण्टे में एक कोश दूसरे घण्टे में दो कोश तीसरे घण्टे में तीन कोश इस चाल से चला फिर तीसरे घण्टे के अन्त में उसका जो चलने का वेग था उसी वेग से चल कर मंजिल पूरा किया तो बताओ वह कितने घण्टे में वहाँ पहुँचा ? ।

उ० घं० ५३ ।

(२) एक राजा की फौज दुश्मन को भगाने के लिए उसके किले पर चली जिसकी दूरी फौज से १११ कोश थी यह फौज पहिले दिन ३ कोश फिर प्रतिदिन दो दो कोश की वृद्धि से चली घाद नव रोज के लश्कर में खबर पहुँची कि दुश्मन किला छोड़ कर भागा इस लिये उस वक्त जो फौज के चलने का वेग था उसी वेग से उन लोगों ने दुश्मन का पीछा किया और छ रोज में दुश्मन के यहाँ पहुँच कर उसको गिरिफ्तार किया तो बताओ कि दुश्मन रोज कितना भागता था ? ।

उत्तर १८ कोश ।

इति प्रथमाध्याय ।

## द्वितीयाध्याय २ ।

साधारणफलों के सम्बन्ध के विषय में ।

११ । इस प्रक्रम में अनेक फलों के सम्बन्ध की सुगम रीति दिखलाते हैं ।

प्रथम सिद्धान्त

यदि  $r = y^n$  यहाँ  $n$  पूर्ण और घन संख्या है

तो  $r^1 = (y + y)^n = y^n + n \cdot y^{n-1}y + \dots + y^n$

$\therefore \Delta r = n \cdot y^{n-1}y + \dots + y^n$

तब पूर्वोक्त युक्ति से  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = n \cdot y^{n-1}$

इसी तरह यदि  $r = y^{\frac{n}{m}}$

तो  $r^m = y^n = 1$  फिर पूर्व युक्ति से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = n \cdot y^{n-1}$$

परन्तु  $\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot m \cdot r^{m-1}$  इस हेतु  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{n}{m} \times \frac{y^{n-1}}{r^{m-1}}$

वा  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{n}{m} \times \frac{y^{n-1} \times y^{\frac{n}{m}}}{r^m} = \frac{n}{m} \times \frac{y^{n-1} \times y^{\frac{n}{m}}}{1} = \frac{n}{m} \times y^{\frac{n-m}{m}}$

इसी रीति से यदि  $r = y^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{m}}}$

तब  $r \cdot y^n = 1$ , पूर्व विधि से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \times y^n + r \cdot y^{n-1} \times n = 0$$

इसलिये  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -n \cdot \frac{y^{n-1}}{y^n} \times r = \frac{-n \cdot y^{n-1}}{y^n} = -n y^{-(n+1)}$

इससे यह सिद्ध होता है कि घात की संख्या से उस राशि के एकोनघात को गुण देने से राशिघात का सम्बन्ध होता है ।

द्वितीय सिद्धान्त ।

यदि  $r = a^x$  तो  $r = \{ 1 + (a-1) \}^x$

परन्तु  $\{ 1 + (a-1) \}^x = 1 + x(a-1) + x \left( \frac{x-1}{2} \right) (a-1)^2 + \dots$

$$= 1 + x \left\{ (a-1) - \left( \frac{a-1}{2} \right)^2 + \dots \right\} + \dots$$

इसलिये  $r = a^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

एक ऐसी ऐसी होगी

अथ  $a^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$\therefore a^y = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots$

दोनों को परस्पर गुण देने से और पूर्व युक्ति से

$$a^{x+y} = 1 + a_1 (x+y) + a_2 (x+y)^2 + \dots$$

$$= 1 + y (a_1 + 2a_2c + \dots) + \dots = a^x \times a^y$$

$$= a^x (1 + a_1y + a_2y^2 + \dots)$$

∴ सरूप समीकरणसे,  $a_1 \cdot a^x = a_1 + 2a_2 \cdot c + 3a_3 \cdot c^2 + \dots$

$$= a_1 + a_2 \cdot c + a_1 \cdot a_2 \cdot c^2 + \dots$$

इस लिये  $a_2 = 2a_2 \cdot c \therefore a_2 = \frac{a_1^2}{2}$

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{a_1^3}{2} = 3a_3 \therefore a_3 = \frac{a_1^3}{2 \cdot 3}$$

इसी तरह आगे भी जानना तब

$$a^y = 1 + a_1y + \frac{a_1^2}{2} \cdot y^2 + \frac{a_1^3}{2 \cdot 3} \cdot y^3 + \dots$$

यदि  $a^y = a^{\frac{1}{n}}$ , तो  $a^{\frac{1}{n}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

यदि  $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = 2$

तो  $a^{\frac{1}{n}} = 2 \therefore a = 2^n$

यहाँ  $a_1$  को 2 के आधार में  $a$  का लघुरिक्त्य कहते हैं इसे यों लिखते हैं  $\log_a a = 1$ , अर्थात् लघुरिक्त्य 2 आधार में  $a$  का  $a_1$  है यहाँ  $a_1 = (a - 1) - \frac{1}{2} (a - 1)^2 + \frac{1}{3} (a - 1)^3 - \dots$ , इस लिये  $r = a^y = 1 + (\log_a a) y + \frac{1}{2} (\log_a a)^2 \cdot y^2 + \dots$  यों भी लिख सकते हैं ।

$$\text{अथ, } r = a^y = 1 + (\log_a a)y + \frac{1}{2} (\log_a a)^2 \cdot y^2 + \dots$$

इस लिये  $r^1 = a^{y+x} = a^y \{ 1 + (\log_a a)x + \frac{1}{2} (\log_a a)^2 \cdot x^2 + \dots \}$

$$\Delta r = \{ (\log_a a) x + \frac{1}{2} (\log_a a)^2 \cdot x^2 + \dots \} a^y$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = a^y (\log_a a) = r \times \log_a a$$

इस से यह सिद्ध होता है कि 2 आधार में  $a$  का जो लघुरिक्त्य हो उसे चलसंख्या से गुण देने से उस का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

इसी युक्ति से यदि  $r = \text{अ}^{\text{क.य}}$

तो  $r = \text{ग}^{\text{य}}$  यहाँ  $\text{ग} = \text{अ}^{\text{क}}$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{ग}^{\text{य}} \times \text{ल}^{\text{इ.ग}} \quad \text{परन्तु ल}^{\text{इ.ग}} = \text{क} \cdot \text{ल}^{\text{इ.अ}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क} \cdot \text{ल}^{\text{इ.अ}} \cdot \text{अ}^{\text{क.य}}$$

तीसरा सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{ल}^{\text{इ.य}}$

तो  $\text{इ}^{\text{र}} = \text{य}$  इस हेतु दूसरे सिद्धान्त से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = \text{इ}^{\text{र}} \cdot \text{ल}^{\text{इ.इ}} = \text{इ}^{\text{र}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\text{य}}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में चलराशि से भाग दो तो लघुरिक्थ का तारकालिकसम्बन्ध होता है यदि इ आधार में लघुरिक्थ हो तो ।

चौथा सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{ज्याय}$

तो  $r' = \text{ज्या} (य + च)$

$$\text{और } \Delta r = \text{ज्या} (य + च) - \text{ज्याय} = \frac{2 \text{ कोज्या} (य + \frac{1}{2} \text{ च}) \cdot \text{ज्या } \frac{1}{2} \text{ च}}{\text{त्रि}}$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta य} = \frac{\text{कोज्या} (य + \frac{1}{2} \text{ च}) \cdot \text{ज्या } \frac{1}{2} \text{ च}}{\text{त्रि} \cdot \frac{1}{2} \text{ च}}$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{कोज्याय}}{\text{त्रि}}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि कोटिज्या में त्रिज्या का भाग दो तो जीवा का तारकालिकसम्बन्ध होता है ।

इस तारकालिकसम्बन्ध को भास्कराचार्य जी जानते थे अपने सिद्धान्तशिरोमणि के १५४४ अधिकार में लिखा है परन्तु इसका जानना येसा ही था जैसा प्रान्तिश्रेत्र का जानना ।

पांचवां सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{कोज्याय}$

तो  $r' = \text{कोज्या (य + च)}$

इस लिये  $\Delta r = \text{कोज्या (य + च)} - \text{कोज्याय} = \frac{-२ \text{ ज्या (य + } \frac{१}{३} \text{ च) ज्या } \frac{१}{३} \text{ च}}{\text{त्रि}}$

$$\frac{\Delta r}{\Delta y} = \frac{- \text{ज्या (य + } \frac{१}{३} \text{ च) } \frac{\text{ज्या } \frac{१}{३} \text{ च}}{\frac{१}{३} \text{ च}}}{\text{त्रि}} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{- \text{ज्याय}}{\text{त्रि}}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि जीवा में त्रिज्या का भाग दो तो कोटिज्या का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

छठवां सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{स्पय} = \frac{\text{त्रि} \cdot \text{ज्याय}}{\text{कोज्याय}}$  तो प्रथमाध्याय के चौथे सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{त्रि} \left( \frac{\text{कोज्या}^२ \text{य} + \text{ज्या}^२ \text{य}}{\text{त्रि} \cdot \text{कोज्या}^२ \text{य}} \right) = \frac{\text{त्रि}^२ \times \text{त्रि}^२}{\text{त्रि}^२ \cdot \text{कोज्या}^२ \text{य}} = \frac{\text{छे}^२ \text{य}}{\text{त्रि}^२}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि छेदनरेखा के वर्ग में त्रिज्या के वर्ग का भाग देने से स्पर्शरेखा का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

सातवां सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{कोस्पय} = \frac{\text{त्रि} \cdot \text{कोज्याय}}{\text{ज्याय}}$  यहाँ भी प्रथमाध्याय के चौथे

सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{त्रि} \left( \frac{- \text{ज्या}^२ \text{य} - \text{कोज्या}^२ \text{य}}{\text{त्रि} \cdot \text{ज्या}^२ \text{य}} \right) = \frac{- \text{त्रि}^२}{\text{ज्या}^२ \text{य}} = - \frac{\text{कोछे}^२ \text{य}}{\text{त्रि}^२}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि कोटिछेदनरेखा के वर्ग में त्रिज्या-वर्ग का भाग देने से कोटिस्पर्शरेखा का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

आठवां सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{छेय} = \frac{\text{त्रि}^२}{\text{कोज्याय}}$  यहाँ भी पूर्वोक्त युक्ति से



$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{त्रि}^2 \left( \frac{+ \text{व्याय}}{\text{त्रि} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{य}} \right) = \frac{\text{त्रि} \cdot \text{व्याय}}{\text{कोज्याय} \times \text{कोज्याय}} = \frac{\text{स्पय}}{\text{कोज्याय}}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि स्पर्शरेखा में कोटिव्या का भाग देने से छेदनरेखा का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

नवाँ सिद्धान्त ।

$$\text{यदि } r = \text{कोछेय} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{व्याय}} \text{ यहाँ भी उसी युक्ति से}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{त्रि}^2 \left( \frac{- \text{कोज्याय}}{\text{त्रि} \cdot \text{व्याय}^2 \text{य}} \right) = \frac{- \text{त्रि} \cdot \text{कोज्याय}}{\text{व्याय} \cdot \text{व्याय}} = \frac{- \text{कोस्पय}}{\text{व्याय}}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि कोटिस्पर्शरेखा में जीवा का भाग देने से कोटिछेदन का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

दशवाँ सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{उय} = \text{त्रि} - \text{कोज्याय}$ , यहाँ प्रथमाध्याय के तीसरे सिद्धान्त से  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{व्याय}}{\text{त्रि}}$  इसी चाल से

$$\text{यदि } r = \text{कोउय} = \text{त्रि} - \text{व्याय}$$

$$\text{तो } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{- \text{कोज्याय}}{\text{त्रि}}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि कोटिव्या का जो ऋणात्मकसम्बन्ध यही धनात्मकसम्बन्ध उत्क्रमज्या का होता है और जीवा का जो धनात्मकसम्बन्ध यही ऋणात्मकसम्बन्ध कोटि के उत्क्रमज्या का होता है ।

१२ । इस प्रक्रम में पूर्व सिद्धान्तों से उत्पन्न सम्बन्धों को विद्यार्थियों के अभ्यासार्थ एकट्ठा करके लिखते हैं ।

$$(१) r = \text{य}^n \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{न} \cdot \text{य}^{n-1}$$

$$(२) r = \text{अ}^p \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{अ}^p \cdot \text{ल}^p \text{अ}$$

$$(३) r = \text{अ}^p \text{य} \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{अ}^p \text{य} \cdot \text{क} \cdot \text{ल}^p \text{अ}$$

( ४ ) र=लूय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{य}}$
( ५ ) र=व्याय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{कोज्याय}$
( ६ ) र=कोज्याय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{ज्याय}$
( ७ ) र=स्पय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{छे}^२\text{य}$
( ८ ) र=कोस्पय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{कोछे}^२\text{य}$
( ९ ) र=छेय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{स्पय}}{\text{कोज्याय}}$
( १० ) र=कोछेय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-\text{कोस्पय}}{\text{व्याय}}$
( ११ ) र=वय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{व्याय}$
( १२ ) र=कोवय	$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{कोज्याय}$

यहाँ लाघवार्थ सर्वत्र रूप अर्थात् १ त्रिज्या मान के तात्कालिक-सम्बन्धों को लिखा है ।

विद्यार्थियों को अच्छी तरह याद करने के लिये इन के श्लोक और दोहे लिखते हैं ।

श्लोक ।

राशिरूपोनघातघ्नो घाताङ्को भवतीह सः ।

यस्तात्कालिकसम्बन्धो राशिघातस्य सर्वदा ॥

दोहर ।

राशिघातघाताङ्कको गुणन राशि सों भाग ।

राशिघातसम्बन्ध सो है है सदा अदाग ॥

श्लोक ।

इ-संज्ञाधारजातं यज्ञयुरिष्यं स्थिरस्य वै ।

निज्ञाधारस्य राशिघ्नं राशिसम्बन्धसंमितिः ॥

दोहा ।

ई-संज्ञक आधार में लघुरिक्थ को जान ।

निज अधार को राशि से गुणि सम्बन्ध प्रमान ॥

श्लोक ।

इ-संज्ञाधारजातेन भक्तं रूपं फलं भवेत् ।

लघुरिक्थजसम्बन्धो लघुरिक्थोत्थराशिना ॥

दोहा ।

एक अंश लघुरिक्थभवराशिछेद तें भिन्न ।

लघुरिक्थसम्बन्ध सो जानहु मित्र भखिन्न ॥

श्लोक ।

कोटिज्या तु भुजज्यायाः कोटिज्याया ऋणो गुणः ।

गणकेन सदा ज्ञेयः सम्बन्धः क्रमशः खलु ॥

दोहा ।

भुजजीवा को कोटिगुण होत सदा सम्बन्ध ।

अरु ऋणजीवा होत है कोटिज्यासम्बन्ध ॥

श्लोक ।

छेदनस्य कृतिर्ह्येयस्पर्शसम्बन्ध एव वै ।

कोटिच्छेदनवर्गश्च कोटिस्पर्शभवोऽघनः ॥

दोहा ।

छेदन को जो वर्ग हो सो स्पर्शजसम्बन्ध ।

कोटिच्छेदन वर्ग ऋण कोटिस्पर्शसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

स्पर्शः कोटिज्याया भक्तसम्बन्धश्छेदनस्य सः ।

कोटिच्छेदनजः कोटिस्पर्शो मीर्व्याहृतोऽघनः ॥

दोहा ।

कोटिज्याहत स्पर्श जो सो छेदनसम्बन्ध ।

कोटिस्पर्श जीवाविहत छेदनकोटिसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

भुजज्योत्क्रमजीवाया ऋणकोटिज्याया तथा ।

कोट्युत्क्रमगुणस्य त्यातसम्बन्धस्ततं स्फुटः ॥

दोहा ।

भुजजीवा को जाननो उत्क्रमगुणसम्बन्ध ।

कोट्युत्क्रम को कोटिगुण ऋण यह सीखु प्रथम ॥

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

( १ )  $r = \frac{४y^n + ५}{-३}$  इसका तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ?

$$\text{उ० } \frac{४}{३} n \cdot y^{n-1} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$$

( २ )  $r = \frac{७y^3 + ४y^2 + ३y^2 + y + १५}{८}$  इसका तात्कालिक-

सम्बन्ध क्या है ?  $\text{उ० } \frac{४९y^2 + २५y^2 + ९y^2 + १}{८} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

( ३ )  $r = \frac{७y^2 + ११}{५y^2 + ९} \dots \text{उ० } \frac{y^2(७०y^2 + १५७y^2 - ३८५)}{(५y^2 + ९)^2} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

( ४ )  $r = ३^x y \dots \text{उ० } ३^x \cdot y \times ३ = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

( ५ )  $r = ७y \dots \text{उ० } \frac{१}{y \cdot ७} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

( ६ )  $r = ३^x y \dots \text{उ० } ८ \cdot ३^x y = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

( ७ )  $r = \frac{३^x y + १}{y + १} \dots \text{उ० } \frac{३^x y (७y + ६) - १}{(y + १)^2} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

( ८ )  $r = ४y \dots \text{उ० } \frac{४}{y} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

( ९ )  $r = \frac{७y}{y-३} \dots \text{उ० } \frac{१}{y(y-३)} - \frac{७y}{(y-३)^2} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

( १० )  $r = \frac{७y}{३^x} \dots \text{उ० } \frac{१}{y \cdot ३^x} - \frac{७y}{३^x} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} ।$

सदाहरण ।

( १ ) एक भादमी के पास १०) था उसने इसे व्यापार में लगा  
२

कर प्रथम वर्ष के अन्त में १२१) किया फिर दूसरे वर्ष के अन्त में १४४) इतना किया यों प्रतिवर्ष में वर्ष संख्यायुत मूलधन के वर्गमूल्य वृद्धि होती थी। यदि चौथे वर्ष के अन्त में उस के धन के बढ़ने का जो वेग था उसी वेग से पाँचवें वर्ष में वृद्धि होती तो पूर्व नियमानुसार उसको कितना घाटा पड़ता ? ।

उत्तर १ रुपया ।

( २ ) एक पुरुष को वर्ष दिन में पहिले १०) रुपया मिला फिर दूसरे वर्ष के अन्त में १०० तीसरे वर्ष के अन्त में १००० मिला तो बताओ यदि तीसरे वर्ष के अन्त में जो तनख्वाह बढ़ने का वेग था उसी वेग से चौथे वर्ष में तनख्वाह होती तो कितना पाता ? ।

उत्तर २९२२.५ ।

इति द्वितीयाध्याय ।

### तृतीयाध्याय ३ ।

त्रिकोणमितिफलों के छूटे सम्बन्ध के विषय में ।

१३ । प्रथम सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{ज्या}^{-1}y$

तो  $\text{ज्यार} = y$  इस लिये दूसरे अध्याय के चौथे सिद्धान्त से,

$$\text{कोज्यार} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\text{कोज्यार}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} ।$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में कोटिज्या का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

द्वितीय सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{कोज्या}^{-1}y$  यहाँ भी उसी युक्ति से

$$\text{कोज्यार} = y \therefore \text{ज्यार} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}}$$

$$\text{इस हेतु } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\text{ज्यार}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} ।$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में ऋणजीवा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

तीसरा सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{स्प}^{-1}y$

तो  $\text{स्पर} = y$  फिर पूर्व युक्ति से

$$\frac{\text{छे}^2 r}{\text{तार}} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \therefore \frac{\text{छे}^2 r}{\text{तार}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{चा, } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{1+y^2},$$

इसी तरह यदि  $r = \text{कोस्प}^{-1}y$

तो  $\text{कोस्पर} = y$  यहाँ भी पूर्वोक्त विधि से

$$-\frac{\text{कोछे}^2 r}{\text{तार}} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{कोछे}^2 r} = \frac{-1}{1+y^2} = \frac{-1}{1+y^2}.$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में छेदनरेखा के वर्ग का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा रूप में कोटि-छेदनरेखा के वर्ग का भाग देने से ऋणात्मक चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

चौथा सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{छे}^{-1}y$  तो  $\text{छेर} = y$

यहाँ दूसरे अध्याय से

$$\frac{\text{स्पर}}{\text{कोज्यार}} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{कोज्यार}}{\text{स्पर}}$$

$$\text{परन्तु कोज्यार} = \frac{1}{y} \text{ और स्पर} = \sqrt{y^2-1}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$$

इसी युक्ति से, यदि  $r = \text{कोछे}^{-1}y$

$$\text{तो } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-1}{y\sqrt{y^2-1}}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि कोटिज्या में स्पर्शरेखा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा जीवा में कोटिस्पर्श का भाग देने से जो लब्ध हो उसे ऋण करने से चाप का तात्कालिक-सम्बन्ध होता है ।

पाँचवाँ सिद्धान्त ।

यदि  $r = \text{ज्या}^{-1}y$  तो  $\text{तर} = y$

यहाँ भी पूर्वोक्त रीति से

$$\text{ज्यार} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\text{ज्यार}}$$

$$\text{वा } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2y - y^2}} \quad |$$

इसी युक्ति से यदि  $r = \text{कोज्या}^{-1}y$

$$\text{तो } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-1}{\text{कोज्यार}} = \frac{-1}{\sqrt{2y - y^2}} \quad |$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में जीवा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा रूप में ऋण कोटिज्या का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

१४ । पूर्व सिद्धान्तों से उत्पन्न सम्बन्ध को स्मरणार्थ एकट्ठा लिखते हैं ।

$$(१) \quad r = \text{ज्या}^{-1}y \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad |$$

$$(२) \quad r = \text{कोज्या}^{-1}y \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad |$$

$$(३) \quad r = \text{स्य}^{-1}y \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{1 + y^2} \quad |$$

$$(४) \quad r = \text{कोस्य}^{-1}y \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{1}{1 + y^2} \quad |$$

$$(५) \quad r = \text{छे}^{-1}y \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}} \quad |$$

$$(६) r = कोछे^{-१}y \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{१}{y\sqrt{y^2-१}} \quad ।$$

$$(७) r = r^{-१}y \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{२y-y^2}} \quad ।$$

$$(८) r = कोठ^{-१}y \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{१}{\sqrt{२y-y^2}} \quad ।$$

इन के श्लोक और दोहे विद्यार्थियों के अभ्यासार्थ लिखते हैं ।

श्लोक ।

जीवया कोटिमौर्व्या च पृथक् चन्द्रो विभाजितः ।

आद्योऽधनात्मकः कार्यसम्बन्धौ चापजो ततः ॥

दोहा ।

जीवाहत जो रूप हो ऋण कार्मुकसम्बन्ध ।

कोटिज्याहत रूप वा सो कार्मुकसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

रूपी छेदनकोटिच्छेदनकृत्या हृतावन्तः ।

अधनस्तदा भवेतां चापमवो तत्र सम्बन्धौ ॥

दोहा ।

छेदनकृतिहत रूप हो सोई चापसम्बन्ध ।

ऋणकोटिच्छेदकृतिहत एक होत सम्बन्ध ॥

श्लोक ।

कोटिज्या स्पर्शभक्ता वा कोटिस्पर्शहृतो गुणः ।

ऋणस्तदा भवेतां तौ सम्बन्धौ चापजो सदा ॥

दोहा ।

स्पर्शविहत गुण कोटि को सो है धनुसम्बन्ध ।

कोटिस्पर्श विमक्त वा ऋणजीवा सम्बन्ध ॥

१५ । इस प्रक्रम में विद्यार्थियों को उदाहरण के उचर करने की युक्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरणों का उचर निकाल कर के लिखते हैं ।



(१) जब कि  $r = sp$  (क·य) यहाँ क·य = ल

तब  $r = spल$  अथ द्वितीयाध्याय के छठवें सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = छे^३ल ।$$

और  $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = क$ , दोनों को परस्पर गुण देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = क \cdot छे^३कय \text{ यही उत्तर हुआ ।}$$

(२)  $r = sp^{-१}कय$  यहाँ भी कय = ल

तब  $r = sp^{-१}ल$  इस अध्याय के तीसरे सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \frac{१}{१ + ल^२} \text{ परन्तु } \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = क$$

इस लिये  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{क}{१ + ल^२} = \frac{क}{१ + क^२ \cdot य^२}$  यही उत्तर हुआ ।

(३)  $r = sp$  (लय) जब कोई आधार न हो वहाँ इ आधार समझो ।

यहाँ मानो कि लय = ल

तब  $r = spल$  पूर्व युक्ति से  $\frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = छे^३ल$  परन्तु ल = लय

इस लिये  $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{१}{य}$  इस से ऊपर वालों को गुण देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{छे^३ल}{य} = \frac{छे^३(लय)}{य} \text{ यही उत्तर है ।}$$

(४)  $r = ल_२$  (स्पय) यहाँ स्पय = ल

तब  $r = ल_ल$  फिर पूर्व युक्ति से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \frac{१}{ल} \text{ परन्तु स्पय = ल}$$

इस लिये  $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = छे^३य$  इस से ऊपर के पक्षों को गुण देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{छे}^2\text{य}}{\text{स्पय}} \text{ यही उत्तर हुआ ।}$$

( ५ )  $r = \text{ज्याय} \cdot \text{कोस्य}^{-1}\text{य} \cdot \text{इ}^{\text{य}}$  यहाँ प्रथमाव्याय के तीसरे सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{कोज्याय} \cdot \text{कोस्य}^{-1}\text{य} \cdot \text{इ}^{\text{य}}$$

$$+ \text{ज्याय} \cdot \text{इ}^{\text{य}} \times \frac{-1}{1+y^2} + \text{ज्याय} \cdot \text{कोस्य}^{-1}\text{य} \cdot \text{इ}^{\text{य}}$$

$$\text{वा } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{इ}^{\text{य}} \cdot \text{कोस्य}^{-1}\text{य} (\text{कोज्याय} + \text{ज्याय}) - \frac{\text{ज्याय} \cdot \text{इ}^{\text{य}}}{1+y^2}$$

यही उत्तर हुआ ।

यों विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरण का उत्तर करें ॥

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१)  $k\sqrt[3]{y} = r$  इस का तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ? ।

$$\text{उ० } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = k \left( \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \right) ।$$

(२)  $g(\sqrt{y} + \sqrt[3]{y}) = r$ , उ०  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = g \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \right) ।$

(३)  $k(\text{ज्याय} + \text{कोज्याय}) = r$ , उ०  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = k(\text{कोज्याय} - \text{ज्याय})$  क ।

(४)  $k(\text{छेय} + \text{स्पय}) = r$ , उ०  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{k(\text{ज्याय} + 1)}{\text{कोज्या}^2\text{य}}$  ।

(५)  $(\text{छेय} + \text{कोछेय}) k = r$  उ०  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = k \left( \frac{\text{स्यय}}{\text{कोज्याय}} - \frac{\text{कोस्यय}}{\text{ज्याय}} \right) ।$

(६)  $k(\text{ज्या}^2\text{य} + \text{कोज्या}^2\text{य}) = r \dots\dots\dots$  उ०  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 ।$

(७)  $\frac{1}{k}(\text{स्यय} \times \text{कोस्यय} + ५) = r \dots\dots\dots$  उ०  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 ।$

(८)  $g(\text{छे}^3\text{य} - \text{स्प}^3\text{य}) = r \dots\dots\dots$  उ०  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 ।$

$$(९) घ (स्पय \cdot कोस्पय + छे^२य - स्प^२य) = र, \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ० ।$$

$$(१०) घ \cdot ज्या \left( \frac{य^२ + ३}{३य + १} \right) = र,$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = घ \cdot \left( \frac{३य^२ + २य - ९}{९य^२ + ६य + १} \right) कोज्या \left( \frac{य^२ + ३}{३य + १} \right) ।$$

$$(११) क \cdot कोज्या \left( \frac{य + ४}{य + ७} \right) = र,$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -क \cdot \frac{२}{(य + ७)^२} \times ज्या \left( \frac{य + ४}{य + ७} \right) ।$$

$$(१२) क \cdot स्प \left( \frac{य + ४}{५} \right) = र, \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = क \cdot ६ छे^२ \left( \frac{य + ४}{५} \right) ।$$

$$(१३) क \cdot कोस्प \left( \frac{य + ३}{२} \right) = र, \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -३ क \cdot कोछे^२ \left( \frac{य + ३}{२} \right) ।$$

$$(१४) क \cdot स्प^{-१} (य + ७) = र, \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{क}{य^२ + १४य + ४०} ।$$

$$(१५) कोज्या^{-१} \left( \frac{य^२ + १}{५} \right) = र, \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-२य}{\sqrt{२४ - २य^२ - य^४}} ।$$

$$(१६) स्प^{-१} (य^३ + ५) = र, \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{३य^२}{य^६ + १०य^३ + २६} ।$$

$$(१७) छे \left( \frac{य^३ + ४}{य^२ + ३} \right) = र, \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{(य^४ + ९य^२ - ८य) स्प \left( \frac{य^३ + ४}{य^२ + ३} \right)}{(य^४ + ६य^२ + ९) कोज्या \left( \frac{य^३ + ४}{य^२ + ३} \right)} ।$$

$$(१८) कोछे \left( \frac{३य + ७}{५य + ७} \right) = र, \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-११ कोस्प \left( \frac{३य + २}{५य + ७} \right)}{(५य + ७)^२ ज्या \left( \frac{३य + २}{५य + ७} \right)} ।$$

$$(१९) छे^{-१} \left( \frac{य^२ + य - २}{य - ३} \right) = र,$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{य^२ - ६य - १}{(य^२ + य - २) \sqrt{य^४ + २य^३ - ४य^२ + २य - ५}} ।$$

$$(२०) \text{ कोट्टे}^{-१} \left( \frac{२य^२ + य}{२य + ५} \right) = र,$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \frac{६य^२ + २०य + ५}{(२य^२ + य) \sqrt{४य^६ + ४य^३ - ८य^२ - २०य - २५}} ।$$

$$(२१) \text{ उज्या } (य^२ + \frac{१}{४}) = र, \quad \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = २य \cdot \text{उज्या } (य^२ + \frac{१}{४}) ।$$

$$(२२) \text{ कोउज्या } (य^३ + \frac{१}{३}) = र, \quad \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -३य^२ \cdot \text{कोउज्या } (य^३ + \frac{१}{३})$$

$$(२३) \text{ उ}^{-१} \text{ज्या } \left( \frac{१}{य + २} \right) = र, \quad \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \frac{-१}{(य + २) \sqrt{२य + ३}} ।$$

$$(२४) \text{ कोउ}^{-१} \text{ज्या } \left( \frac{य + १}{य + २} \right) = र,$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \frac{१}{(य + २) \sqrt{य^२ + ४य + ३}} ।$$

$$(२५) \left( \frac{य + २}{४} \right)^४ = र, \quad \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \left( \frac{य + २}{४} \right)^३ ।$$

$$(२६) (य + २)^३ (य^२ + ३)^४ = र,$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \{ (य^२ + ३)^४ (य + २)^३ \} \{ ९ + २०य + १३य^२ \} ।$$

$$(२७) \sqrt{य + ७} = र \dots \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{२य + ७}} ।$$

$$(२८) \left( \frac{य + ३}{य - १} \right)^{\frac{५}{३}} = र, \dots \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-\frac{२०}{३} \left( \frac{य + ३}{य - १} \right)^{-\frac{२}{३}}}{(य - १)^२} ।$$

$$(२९) २(य + २) + ३(य^३ + ५) = र, \quad \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ९य^२ + २ ।$$

$$(३०) \frac{८}{य + ५} + \frac{९}{य + ६} - \frac{११}{य^२ + ११य + ३०} = र,$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \frac{१७य^२ + १६४य + ३९२}{(य^२ + ११य + ३०)^२} ।$$

$$(३१) \text{अभय} + \text{य} = \text{र} \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{ल३अ} \cdot \text{अ} \cdot \text{अभय} + १ ।$$

$$(३२) \text{अ} \cdot \text{य} \times \text{अभय} = \text{र} \text{ उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{अ} \cdot \text{अभय} (\text{य} \cdot \text{ल३अ} \cdot \text{अ} + १) ।$$

$$(३३) \frac{\text{अ}^१}{\text{य}} = \text{र} \dots \dots \text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \frac{\text{र}}{\text{य}^२} (\text{क} + \text{य}) ।$$

यहाँ क = ल३अ ।

$$(३४) \frac{\text{अकय}}{\text{कय}} = \text{र}, \text{ उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{अभय}}{\text{क} \cdot \text{य}^२} (\text{ल३अ} \cdot \text{य} \cdot \text{क} - १) ।$$

$$(३५) \text{ल३} (\text{य}^२ + ११) = \text{र}, \text{ उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{रय}}{\text{य}^२ + ११} ।$$

$$(३६) \frac{\text{अय}}{\text{अभय}} = \text{र}, \text{ उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{अ} (१ - \text{य} \cdot \text{अ} \cdot \text{ल३अ})}{\text{अभय}} ।$$

$$(३७) \frac{\text{स्वअय}}{\text{अस्वअय}} = \text{र},$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{र} \cdot \text{अ} \cdot \text{ल३}^२ \cdot \text{अय} (१ - \text{स्वअय} \cdot \text{ल३अ})}{\text{स्वअय}} ।$$

$$(३८) \text{कोज्याय} \cdot \text{यज्याय} = \text{र},$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{यज्याय} \left( \frac{\text{ज्या}^२ \text{य}}{\text{रय}} + \text{कोज्या}^२ \text{य} \cdot \text{ल३य} - \text{ज्याय} \right) ।$$

$$(३९) \left( \frac{\text{य}}{\text{ज्याय}} \right)^{\text{यज्याय}} = \text{र},$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ज्याय} - \text{य} \cdot \text{कोज्याय}}{\text{ज्या}^२ \text{य}} \left\{ \text{ल३} \left( \frac{\text{य}}{\text{ज्याय}} \right) + १ \right\} ।$$

$$(४०) (\text{य} + \text{ज्याय}) \text{य} + \text{ज्याय} = \text{र},$$

$$\text{उ०} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \{ \text{र} + \text{र} \cdot \text{कोज्याय} \} \{ \text{ल३} (\text{य} + \text{ज्याय}) + १ \}$$

$$(४१) \{ \text{स्व} (\text{ल३य}) \} \text{ल३य} = \text{र},$$

$$\text{उ० } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{r}{y} \left[ \text{ल३} \{ \text{स्प}(\text{ल३य}) \} + \frac{\text{छे}^2 (\text{ल३य}) \times \text{ल३य}}{\text{स्प}(\text{ल३य})} \right] ।$$

$$(४२) (\text{ल३य})^{\text{ल३ल३य}} = r, \text{ उ० } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = २r \left\{ \frac{\text{ल३}(\text{ल३य})}{\text{य} \cdot \text{ल३य}} \right\} ।$$

$$(४३) \text{ यदि ज्याय} + \text{कोज्याय} = \frac{१}{\sqrt{२}} \text{ कोज्या} \left( \frac{\pi}{४} - \text{य} \right) \text{ तो}$$

$$\text{सिद्ध करो कि कोज्याय} - \text{ज्याय} = \frac{१}{\sqrt{२}} \text{ ज्या} \left( \frac{\pi}{४} - \text{य} \right) ।$$

$$(४४) \text{ यदि ज्याय} + \text{ज्या२य} + \text{ज्या३य} + \dots + \text{ज्या२४य}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^{\frac{२४}{२}} \text{य} \cdot \text{ज्या}^{१२य}}{\text{ज्या}^{\frac{२४}{२}}} \text{ तो सिद्ध करो कि}$$

$$\text{कोज्याय} + २\text{कोज्या}^२\text{य} + ३\text{कोज्या}^३\text{य} + \dots + २४\text{कोज्या}^२४\text{य}$$

$$= १२, \text{ यदि } २४\text{य} = २\pi ।$$

उदाहरण ।

( १ ) ज्यामंफ = ज्यामंके • ज्याअंफ जब ऐसा समीकरण ग्रह के मन्दफलज्या का है तो बताओ इष्टकेन्द्रगति में तात्कालिक वेग से मन्दफल की क्या गति होगी ? । उ०  $\frac{\text{मंफग}}{\text{केग}} = \frac{\text{कोज्यामंके} \cdot \text{ज्याअंफ}}{\text{कोज्यामफ}}$  ।

( २ ) मंफ = ज्यामंके • ज्याअंफ यदि ऐसा समीकरण ग्रह के मन्दफल का हो तो एकरूपवेग से मन्दफल की गति बताओ ? ।

$$\text{उ० } \frac{\text{मंफग}}{\text{केग}} = \text{कोज्याके} \cdot \text{ज्याअंफ} ।$$

( ३ ) ज्यामंफ = ज्यामंके • के • ज्याअंफ यदि इस समीकरण से ग्रह की मन्दफलज्या आवे तो इष्टकेन्द्रगति में फल की गति बताओ ? ।

$$\text{उ० } \frac{\text{मंफग}}{\text{केग}} = \frac{\text{ज्याअंफ}}{\text{कोज्यामंफ}} \left( \text{ज्यामंके} + \text{कोज्यामंके} \cdot \text{के} \right) ।$$

(४) ज्यामके =  $\frac{\text{ज्यामके}}{क}$  यह ग्रह के स्पष्टशीघ्रकेन्द्रज्या के लिये

समीकरण है इस पर से स्पष्टशीघ्रकेन्द्रगति बताओ ? ।

$$\text{उ० } \frac{\text{स्पर्केग}}{\text{मकेग}} = \frac{\text{कोज्याफ}}{क}$$

( इन चारो उदाहरणों के लिये भास्कराचार्य के गणिताध्याय का स्पष्टाधिकार देखो ) ।

( ५ ) व्यामको =  $\frac{\text{सु०ज्याल}}{\text{ज्यादि}}$  इसमें यदि केषल "दि" चलराशि हो

तो "ज्यामको" इसकी गति बताओ ? ।

$$\text{उ० } \frac{\text{तामको}}{\text{तादि}} = \frac{-\text{कोज्यादि} \cdot \text{सु०ज्याल}}{\text{कोज्यामको} \cdot \text{ज्या}^2 \text{दि}}$$

( ६ ) एक कीट की पहिले घंटे में एक अङ्गुल दूसरे घंटे के अन्त्य में १६ अङ्गुल, तीसरे घंटे के अन्त्य में ३<sup>२०</sup> अङ्गुल, च घंटे के अन्त्य में ४<sup>३०</sup> अङ्गुल, गति थी । बताओ पाँचवें घंटे के अन्त्य में जो गति का वेग था उसी वेग से यदि छठवें घंटे में चलता तो कितना चलता ? ।

$$\text{उ० } ५^{३३} ( ६ + ७६५ + ७६५ ) ।$$

( ७ ) दो कीट एक कुडाल के पत्र के परिधि पर बैठ के साथ ही परिधि पर चलना आरम्भ किये, पहला जितना घाय चलता था उस के जीवागुण्यपाप को जो कोटिग्या हो उतना चाप दूसरा चलता सो बताओ पहले की गति से दूसरे की गति के गुणित अधिक है ? ।

$$\text{उ० } - \frac{\text{वया( उवाय )}}{(\text{कोज्याय})^2} ।$$

( ८ ) शूकी की दक्षिणा करने के लिये दो पुरुष साथ ही चले पहला गर्भाध्याय से जितना बाणसम्बन्धि भंश चर्छा है उस के जीवागुण्य जितने भंश की स्पन्दरेखा हो उतना दूसरा चलता है तो

दोनों में तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ? ।  $\text{उ० } \frac{\text{कोज्याय}}{\text{ज्या}^2\text{य} + १}$  ।

(यहां पहले का कोणांशसम्बन्ध चाप = य)

(९) वह कौन सा चाप है जिसकी गति से स्पर्शरेखा की गति चौगुनी होती है ? ।  $\text{उ० } = ६०^\circ$  ।

(१०) एक घृतान्तर्गत समत्रिबाहु और समचतुर्भुज है कल्पना करो कि घृत का व्यासार्द्ध दूना हो गया तो तात्कालिकवेग से समत्रिबाहु के फल के चाल से चतुर्भुज के फल की गति कै गुणित अधिक होगी ? ।

$$\text{उ० } \frac{८}{३\sqrt{३}} ।$$

इति तृतीयाध्याय ।

## चतुर्थाध्याय ४ ।

गतिपराम्परा के विषय में ।

१६ । पूर्व अध्यायों से स्पष्ट जान पड़ता है कि तात्कालिकसम्बन्ध भी एक प्रकार का चलराशि का फल है इस लिये यदि इस नये फल का तात्कालिकसम्बन्ध निकालना हो तो पूर्व प्रक्रमों से सहज में निकल सकता है ।

जैसे यदि, फ (य) = र = स्पर्श तो,  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{य}}$

अब यदि  $\frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{य}} = \text{फि (य)} = \text{ल}$  तो  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$   
 $= २ \cdot \text{ज्याय} \cdot \text{कोज्या}^{-3}\text{य}$

वा,  $\frac{\text{ता} \left( \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)}{\text{ताय}} = २ \text{ ज्याय} \cdot \text{कोज्या}^{-3}\text{य}$  इसी प्रकार अब इसे "य"

का नया फल कल्पना कर इस का भी तात्कालिकसम्बन्ध निकाल सकते हो ।



$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$  इसे पहला तात्कालिकसम्बन्ध कहते हैं, और  $\frac{\text{ता} \left( \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)}{\text{ताय}}$  इसे दूसरा तात्कालिकसम्बन्ध कहते हैं ।

यदि  $y$  का तात्कालिकवेग (ताय) प्रत्येक  $y$  के फलों के तात्कालिकसम्बन्धों में एक ही कल्पना करें अर्थात् स्थिर कल्पना करें

तो दूसरे तात्कालिकसम्बन्ध अर्थात्  $\frac{\text{ता} \left( \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)}{\text{ताय}}$  इसे  $\frac{\text{ता}^2 r}{\text{ताय}^2}$  ऐसा लिख सकते हैं । यहाँ “ता” पर जो दो का अङ्क है वह दिखलाता है कि “ $r$ ” का तात्कालिकवेग का वेग अर्थात् दूसरा तात्कालिकवेग है और “ $y$ ” पर का दो का अङ्क दिखलाता है कि  $y$  के तात्कालिकवेग का वर्ग है इस प्रकार, भाज्य और हर दोनों मिल के दूसरे तात्कालिकसम्बन्ध को प्रकाश करते हैं । इसी प्रकार प्रत्येक फलों में  $y$  का तात्कालिकवेग एक ही कल्पना कर तीसरा, चौथा, पाँचवाँ, इत्यादि, तात्कालिकसम्बन्ध भी निकाला जाता है ।

जैसे, जय,  $\frac{\text{ता}^2 r}{\text{ताय}^2} = r$  का दूसरा तात्कालिकसम्बन्ध ।

तो  $\frac{\text{ता}^3 r}{\text{ताय}^3} = r$  का तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध ।

इसी भाँति,  $\frac{\text{ता}^n r}{\text{ताय}^n} = r$  का  $n$  संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध ।

कभी कभी छापबार्थ, प्रथम, द्वितीय, तृतीय, इत्यादि—तात्कालिकसम्बन्धों को  $y$  के फल के ऊपर स्वर दे देने से भी प्रकाश करते हैं अर्थात्, यदि  $r = f(y)$

तो,  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = f'(y)$ ,  $\frac{\text{ता}^2 r}{\text{ताय}^2} = f''(y)$ ,  $\frac{\text{ता}^3 r}{\text{ताय}^3} = f'''(y)$  इत्यादि, ऐसा भी लिखते हैं ।

१७ । विशेष ध्यानो में कहीं कहीं बड़े लाघव से चाहे जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध निकल सकता है ।

जैसे, यदि, ( १ )  $r = k \cdot \text{ला०य}$

$$\text{तो, } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{k}{y}, \frac{\text{ता}^2 r}{\text{ताय}^2} = -k \cdot y^{-2}, \frac{\text{ता}^3 r}{\text{ताय}^3} = 2k \cdot y^{-3}$$

$$\text{और, } \frac{\text{ता}^4 r}{\text{ताय}^4} = -2 \times 3 \cdot k y^{-4}, \frac{\text{ता}^5 r}{\text{ताय}^5} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot k \cdot y^{-5}$$

यहाँ साधारणरूप जानने के लिये, ऊपर के सम्बन्धों को देखने ही से,  $\frac{\text{ता}^n r}{\text{ताय}^n} = \frac{k}{n} (-1)^{n+1} \cdot [n \cdot y^{-n}]$  ऐसा सिद्ध होता है ।

यहाँ  $[n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n]$  ।

( २ ) यदि  $r = ज्या ( इ \cdot य + क )$

$$\text{तो, } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = इ \cdot कोज्या ( इ \cdot य + क ) = इ \cdot ज्या ( इ \cdot य + क + \frac{\pi}{2} )$$

$$\frac{\text{ता}^2 r}{\text{ताय}^2} = इ^2 \cdot कोज्या ( इ \cdot य + क + \frac{\pi}{2} ) = इ^2 \cdot ज्या ( इ \cdot य + क + \frac{2\pi}{2} )$$

$$\frac{\text{ता}^3 r}{\text{ताय}^3} = इ^3 \cdot कोज्या ( इ \cdot य + क + \frac{2\pi}{2} ) = इ^3 \cdot ज्या ( इ \cdot य + क + \frac{3\pi}{2} )$$

$$\text{सामान्य से, } \frac{\text{ता}^n r}{\text{ताय}^n} = इ^n \cdot ज्या ( इ \cdot य + क + \frac{n \cdot \pi}{2} )$$

इसी प्रकार यदि,  $r = कोज्या ( इ \cdot य + क )$

$$\text{तो, } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -इ \cdot ज्या ( इ \cdot य + क ) = इ \cdot कोज्या ( इ \cdot य + क + \frac{\pi}{2} )$$

$$\frac{\text{ता}^2 r}{\text{ताय}^2} = -इ^2 \cdot ज्या ( इ \cdot य + क + \frac{\pi}{2} )$$

$$= इ^2 \cdot कोज्या ( इ \cdot य + क + \frac{2\pi}{2} )$$

$$\text{सामान्य से, } \frac{\text{ता}^n r}{\text{ताय}^n} = इ^n \cdot कोज्या ( इ \cdot य + क + \frac{n \cdot \pi}{2} )$$

इसी प्रकार बहुतों का सम्बन्ध लाघव से निकल सकता है।

१८ । दो फलों के घात के तुल्य यदि तीसरा फल हो तो नीचे लिखी हुई युक्ति से सम्बन्ध जान सकते हैं ।

जैसे, यदि, स=र • ल जहाँ र, और ल दोनों य के फल हैं,

तो, पूर्वविधि से,  $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{ल} ।$

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताय}^2} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} \cdot \text{ल}$$

$$= \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताय}^2} + 2 \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} \cdot \text{ल} ।$$

$$\text{और } \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^3\text{ल}}{\text{ताय}^3} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताय}^2} + 2 \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताय}^2} \\ + 2 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3} \cdot \text{ल}$$

$$= \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^3\text{ल}}{\text{ताय}^3} + 3 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताय}^2} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + 3 \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} + \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3} \cdot \text{ल} ।$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{\text{ता}^4\text{स}}{\text{ताय}^4} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^4\text{ल}}{\text{ताय}^4} + 4 \cdot \frac{\text{ता}^3\text{ल}}{\text{ताय}^3} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + 6 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताय}^2} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} \\ + 4 \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3} + \frac{\text{ता}^4\text{र}}{\text{ताय}^4} \cdot \text{ल} ।$$

यहाँ देखो प्रत्येक सम्बन्धों में यदि आदि अन्त्य के घाताङ्क अर्थात् र और ल को छोड़ दें और ता पर की संख्या को, घातसङ्ख्या समझें तो सघ पद ठीक द्वियुक्पद सिद्धान्तोत्पन्नपद के ऐसे हैं जहाँ पहला पद  $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$  और दूसरा पद  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$  है इस लिये दो फलों के घात का पाहो जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध निकालने के लिये तद् क्रिया उत्पन्न होती है । दोनों फलों का पृथक् पृथक् तात्कालिकसम्बन्ध निकाल, दो पद फलपना करो फिर जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध जानना हो वतना ही घात द्वियुक्पद सिद्धान्त से उन दोनों पदों के योग का कर, आदि अन्त्य पद को छूटे फलों से गुण देना तो वही अभीष्टसम्बन्ध होगा

परन्तु घात करने में घातसङ्ख्या को "ता" के और स्वतन्त्रराशि अर्थात् "य" के ऊपर लिखना चाहिये ।

जैसे, स=२·७ ( जहाँ २ और ७, य स्वतन्त्रराशि के फल हैं )  
समीकरण है यहाँ स का सातवाँ तात्कालिकसम्बन्ध जानना है तो, पूर्व-

युक्ति से पहला पद,  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$  दूसरा पद,  $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$  यह है, अब इन दोनों के

योग का सप्रवात करने से,  $\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^3 = \frac{\text{तार}^3}{\text{ताय}^3} + 3 \frac{\text{तार}^2 \cdot \text{ताल}}{\text{ताय}^3} + 3 \frac{\text{तार} \cdot \text{ताल}^2}{\text{ताय}^3} + \frac{\text{ताल}^3}{\text{ताय}^3}$   
 $+ 2 \frac{\text{तार}^2 \cdot \text{ताल}}{\text{ताय}^3} + 2 \frac{\text{तार} \cdot \text{ताल}^2}{\text{ताय}^3} + 2 \frac{\text{तार} \cdot \text{ताल}}{\text{ताय}^3} + \frac{\text{तार} \cdot \text{ताल}^2}{\text{ताय}^3} + \frac{\text{ताल}^2}{\text{ताय}^3}$  यह हुआ

इसको प्रथम पद में २ का सम्बन्ध है इस लिये इसे ७ से और अन्य-  
पद में ७ का सम्बन्ध है इस लिये इसे २ से गुण देने से दोनों फलों  
के घात का अर्थात् स का सातवाँ तात्कालिकसम्बन्ध

$$= 7 \cdot \frac{\text{तार}^3}{\text{ताय}^3} + 3 \frac{\text{तार}^2 \cdot \text{ताल}}{\text{ताय}^3} + 2 \frac{\text{तार}^2 \cdot \text{ताल}}{\text{ताय}^3} + 2 \frac{\text{तार} \cdot \text{ताल}^2}{\text{ताय}^3} + 2 \frac{\text{तार} \cdot \text{ताल}}{\text{ताय}^3} + 2 \frac{\text{तार} \cdot \text{ताल}^2}{\text{ताय}^3} + \frac{\text{ताल}^3}{\text{ताय}^3} + \frac{\text{ताल}^2}{\text{ताय}^3}$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{\text{तार}^n}{\text{ताय}^n} = 7 \cdot \frac{\text{तार}^{n-1}}{\text{ताय}^{n-1}} + n \cdot \frac{\text{तार}^{n-2} \cdot \text{ताल}}{\text{ताय}^{n-1}} + \frac{n}{2} (n-1) \frac{\text{तार}^{n-2} \cdot \text{ताल}^2}{\text{ताय}^{n-2}} + \dots + \frac{\text{ताल}^n}{\text{ताय}^n} \cdot 2$$

इस सिद्धान्त को लेबनिज (Leibnitz) साहब ने निकाला है इसी कारण इसे "लेबनिज का सिद्धान्त" कहते हैं ।

० एन् १७११ ईसवी में लेबनिज ने तात्कालिकसम्बन्ध के विषय में लडहन के रायल् सोसायटी में मुकद्दमा दायर किया या कि डाक्टर कील करता है कि

इस सिद्धान्त से अनेक उदाहरणों की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है। जैसे, यदि  $s = k \cdot y + m$  ज्या (ख. य + ग) इस में स का (न) संख्यक तारकादिकसम्बन्ध निकालना है तो लेव्निज के सिद्धान्त से,  $r = k \cdot y + m$  और,  $l = ज्या (ख. य + ग)$

$$\text{कल्पना करो तो, } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = k \cdot इ^{(क \cdot य + म)}$$

$$\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} = k^2 \cdot इ^{(क \cdot य + म)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{तार}^n}{\text{ताय}^n} = k^n \cdot इ^{(क \cdot य + म)} \text{ और सत्रहवें प्रक्रम}$$

के दूसरे उदाहरण से,  $\frac{\text{तार}^n \cdot ल}{\text{ताय}^n} = ख^n \cdot ज्या \left( खय + ग + \frac{n \cdot \pi}{2} \right)$

इन पर से,  $\frac{\text{तार}^n \cdot स}{\text{ताय}^n} = r \left\{ क^n \cdot ज्या (खय + ग) \right.$

$$+ न \cdot ख \cdot क^{n-1} \cdot ज्या \left( खय + ग + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot ख^2 \cdot क^{n-2} \cdot ज्या \left( खय + ग + \frac{2\pi}{2} \right)$$

$$+ \dots + r^n \cdot ज्या \left( खय + ग + \frac{n\pi}{2} \right) \left. \right\} ।$$

इसी प्रकार विद्यार्थियों को चाहिये कि बहुत से उदाहरणों को कर लेव्निज के सिद्धान्त का अच्छी भाँति अभ्यास करें ।

यह तारकादिकसम्बन्ध तो ग्यूटन साहब का निकाला है, लेव्निज ने चोरी से कुछ हेर फेर कर उसी को अपने ग्रन्थ में छिल दिया है। (See Hutton's Philosophical Dictionary, Vol. I, page 525.) यद्यपि उस समय में खोषाहटी के विचार से लेव्निज का दावा कुछ ठहरा तथापि अब आजकल सब विद्वानों के मत से तारकादिकसम्बन्ध का प्रकाशक लेव्निज ही है। (See History of Philosophy by Ueberweg, Vol. II, page 99.) ।

१९ । नीचे लिखा हुआ समीकरण कभी कभी विशेष उदाहरणों में बहुत उपयोगी है इस लिये इस पर अवश्य ध्यान देना चाहिये ।

$$\begin{aligned} \text{र. } \frac{\text{ता}^n \text{ल}}{\text{ताय}^n} &= \frac{\text{ता}^{n-1} \text{ल}}{\text{ताय}^{n-1}} - \text{न. } \frac{\text{ता}^{n-1}}{\text{ताय}^{n-1}} \left( \text{ल. } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right) \\ &+ \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{2} \cdot \frac{\text{ता}^{n-2}}{\text{ताय}^{n-2}} \left( \text{ल. } \frac{\text{ता}^2 \text{र}}{\text{ताय}^2} \right) - \dots \\ &+ (-1)^n \cdot \text{ल. } \frac{\text{ता}^n \text{र}}{\text{ताय}^n} \dots (1) \end{aligned}$$

यहाँ न अभिन्न और धनसंख्या है ।

कल्पना करो कि यह समीकरण किसी निश्चित न मान में ठीक है तो दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$\begin{aligned} &\text{र. } \frac{\text{ता}^{n+1} \text{ल}}{\text{ताय}^{n+1}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^n \text{ल}}{\text{ताय}^n} \\ &= \frac{\text{ता}^{n+1} \text{रल}}{\text{ताय}^{n+1}} - \text{न. } \frac{\text{ता}^n}{\text{ताय}^n} \left( \text{ल. } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right) \\ &+ \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{2} \cdot \frac{\text{ता}^{n-1}}{\text{ताय}^{n-1}} \left( \text{ल. } \frac{\text{ता}^2 \text{र}}{\text{ताय}^2} \right) - \dots \\ &+ (-1)^n \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left( \text{ल. } \frac{\text{ता}^n \text{र}}{\text{ताय}^n} \right) \dots (2) \end{aligned}$$

( १ ) समीकरण में यदि र के स्थान में  $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$  का स्थापन देवो

$$\begin{aligned} \text{तो } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^n \text{ल}}{\text{ताय}^n} &= \frac{\text{तार}}{\text{ताय}^n} \left( \text{ल. } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right) - \text{न. } \frac{\text{ता}^{n-1}}{\text{ताय}^{n-1}} \left( \text{ल. } \frac{\text{ता}^2 \text{र}}{\text{ताय}^2} \right) \\ &+ \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{2} \cdot \frac{\text{ता}^{n-2}}{\text{ताय}^{n-2}} \left( \text{ल. } \frac{\text{ता}^3 \text{र}}{\text{ताय}^3} \right) \\ &- \dots + (-1)^n \cdot \text{ल. } \frac{\text{ता}^{n+1} \text{र}}{\text{ताय}^{n+1}} \dots (3) \end{aligned}$$

दूसरे समीकरण के प्रथम पक्ष में द्वितीय पद का जो यह ( न )

मान निकला है इसे दूसरे समीकरण के दूसरे पक्ष के प्रथम पद को छोड़ बाकी पदों में क्रम से घटा देने से,

$$\begin{aligned}
 r \cdot \frac{ता^{n+1}ल}{ताय^{n+1}} &= \frac{ता^{n+1}रल}{ताय^{n+1}} - (n+1) \frac{ता^n}{ताय^n} \left( ल \cdot \frac{तार}{ताय} \right) \\
 &+ \frac{(n+1)(n)}{2} \cdot \frac{ता^{n-1}}{ताय^{n-1}} \left( ल \cdot \frac{ता^2र}{ताय^2} \right) \\
 &- \dots \dots \dots + (-1)^{n+1} ल \cdot \frac{ता^{n+1}र}{ताय^{n+1}} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{यदि } m = n+1 \text{ तो } r \cdot \frac{ता^m ल}{साय^m} \\
 &= \frac{ता^m रल}{साय^m} - m \cdot \frac{ता^{m-1}}{साय^{m-1}} \left( ल \cdot \frac{तार}{साय} \right) \\
 &+ \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{ता^{m-2}}{साय^{m-2}} \left( ल \cdot \frac{ता^2र}{साय^2} \right) \\
 &- \dots \dots \dots + (-1)^m \cdot ल \cdot \frac{ता^m र}{साय^m} \dots \dots (३) ।
 \end{aligned}$$

(३) समीकरण से यह सिद्ध होता है कि यदि (१) समीकरण किसी निश्चित न मान में सत्य हो तो  $n+1$  इस मान में भी सत्य होगा पुनः,  $n$  के स्थान में  $n+1$  इस मान का उत्थापन देने से  $n+2$  इस मान में भी ठीक होगा इस प्रकार पुनः पुनः उत्थापन देने से यही सिद्ध होगा कि निश्चित न मान के अनन्तर चाहे जो अभिन्न और घन न का मान मानो सब में (१) समीकरण सत्य होगा परन्तु यदि  $n=1$  तो स्पष्ट देख पड़ता है कि (१) समीकरण सत्य है इस लिये सर्वदा सब  $n$  के मान में (१) समीकरण ठीक है यह सिद्ध हुआ ।

२०। यदि  $स = फ(य)$  इस का विस्तार एक श्रेणी में हो जिस का रूप,  $स = अ + क \cdot य + ए \cdot य^2 + ग \cdot य^3 + घ \cdot य^4 + \dots$  ऐसा हो, जहाँ अ, क, ए इत्यादि स्थिर हैं तो चार चार तात्कालिकसम्बन्ध निकाल और उन में  $य$  का मान शून्य मानने से क, ए, ग इत्यादि

प्रकट हो सकते हैं, और फल में  $y$  का मान शून्य मानने से  $s$  का मान भी व्यक्त हो जायगा ।

जैसे,

$$\text{यदि, } s = k + l \cdot y + m \cdot y^2 + n \cdot y^3 + o \cdot y^4 + \dots$$

तो तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा से,

$$\frac{t_1 s}{t_1 y} = k + 2l \cdot y + 3m \cdot y^2 + 4n \cdot y^3 + \dots$$

$$\frac{t_1^2 s}{t_1 y^2} = 2l + 2 \cdot 3m \cdot y + 3 \cdot 4n \cdot y^2 + \dots$$

$$\frac{t_1^3 s}{t_1 y^3} = 2 \cdot 3m + 2 \cdot 3 \cdot 4n \cdot y + \dots$$

$$\frac{t_1^4 s}{t_1 y^4} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n + \dots$$

प्रत्येक समीकरणों में  $y$  का शून्य मान मानने से कल्पना करो कि

$$\frac{t_1 s}{t_1 y} = t_1, \frac{t_1^2 s}{t_1 y^2} = t_2, \text{ इत्यादि तो } t_1 = k, \frac{t_2}{2} = l, \frac{t_3}{2 \cdot 3} = m$$

और  $\frac{t_4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = n$  इत्यादि होंगे और मानो कि जब  $y = 0$  तो

$s = t = k$ , अब इन पर से,

$$s = t + t_1 y + \frac{t_2}{2} y^2 + \frac{t_3}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{t_4}{2 \cdot 3 \cdot 4} y^4 + \dots + \frac{t_n}{n!} \cdot y^n$$

इसे म्याक्लारिन (Maclaurin) का सिद्धान्त कहते हैं इस से अनेक नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं ।

इस की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिये जाते हैं ।

(१) कल्पना करो कि  $s = (y + a)^n$  इस में

यदि  $y = 0$  तो  $s = a^n = t$  ।

$$\frac{t_1 s}{t_1 y} = n (y + a)^{n-1} \text{ यदि } y = 0 \text{ तो } t_1 = n \cdot a^{n-1}$$

इसी भाँति सब सम्बन्धों में  $y = 0$  करने से,



$$\frac{ता^३स}{ताय^२} = n(n-1)(य+आ)^{n-2} । त_२ = n(n-1)आ^{n-२} ।$$

$$\frac{ता^३स}{ताय^३} = n(n-1)(n-२)(य+आ)^{n-३} और$$

$त_३ = n(n-1)(n-२)आ^{n-३}$  इत्यादि होंगे,

अब इन का म्याफ्लारिन के सिद्धान्त में स्थापन देने से,

$$स = (य+आ)^n = आ^n + n \cdot आ^{n-१} य + \frac{n(n-1)}{२} आ^{n-२} य^२ \\ + \frac{n(n-1)(n-२)}{२ \cdot ३} आ^{n-३} य^३ + \dots \dots \dots$$

इसी को द्वियुक्पद सिद्धान्त कहते हैं ।

(२) यदि  $स = फ(य) = ज्याय$ , तो यहाँ जब,  $य = ०$  तो  $स = ०$  ।

$$\frac{तास}{ताय} = कोज्याय \quad \text{यदि } य = ० \text{ तो } त_१ = १ ।$$

$$\frac{ता^२स}{ताय^२} = -ज्याय \quad \text{यदि } य = ० \text{ तो } त_२ = ० ।$$

$$\frac{ता^३स}{ताय^३} = -कोज्याय \quad \text{यदि } य = ० \text{ तो } त_३ = -१ ।$$

$$\frac{ता^४स}{ताय^४} = ज्याय \quad \text{यदि } य = ० \text{ तो } त_४ = ० ।$$

$$\frac{ता^५स}{ताय^५} = कोज्याय \quad \text{यदि } य = ० \text{ तो } त_५ = १ । \text{ इत्यादि}$$

$$\text{इस लिये ज्याय} = य - \frac{य^३}{२ \cdot ३} + \frac{य^५}{२ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} - \frac{य^७}{१०} + \dots \dots \dots$$

और जोषा का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$\text{कोज्याय} = १ - \frac{य^२}{२} + \frac{य^४}{२ \cdot ३ \cdot ४} - \frac{य^६}{१६} + \dots \dots \dots$$

जोषा में कोटिज्या का भाग देने से,

$$\text{रफय} = य + \frac{य^३}{१ \cdot ३} + \frac{२य^५}{३ \cdot ५} + \frac{१५य^७}{५ \cdot ७ \cdot ९} + \dots \dots \dots$$

कोटिज्या का एक में भाग देने से,

$$\text{द्वेय} = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1 \cdot 3 y^4}{2 \cdot 4} + \dots$$

इस प्रकार चापीयमान से जीवा कोटिज्या इत्यादि जानने के लिये अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं ।

( ३ )  $s = f(y) = ज्या^{-1} y$  तो यहाँ  $y=0$  तो  $t=0$  ।

$$\frac{तास}{ताय} = t_1 + 2t_2 \frac{y}{2} + 3t_3 \frac{y^2}{2 \cdot 4} + 4t_4 \frac{y^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

यहाँ  $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$  इसे द्वियुक्पद सिद्धान्त से वा

आसन्नमूल से—

$$\text{फैलाने से } \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} y^6 + \dots$$

$$\text{इस लिये } t_1 + 2t_2 \frac{y}{2} + 3t_3 \frac{y^2}{2 \cdot 4} + 4t_4 \frac{y^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

$$= 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1 \cdot 3 y^4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 y^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

यहाँ  $y$  के समान पातों का गुणक समान करने से,

$$t_1 = 1, t_2 = 0, \frac{3t_3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}, \therefore t_3 = 1$$

$$t_4 = 0, \frac{4t_4}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \therefore t_4 = 1 \cdot 3^2, t_5 = 0$$

$$\frac{5t_5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \therefore t_5 = 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\therefore ज्या^{-1} y = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{y^7}{7} + \dots$$

इस में सामान्य रीति से  $n$  संख्यकपद

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{y^{2n-1}}{2n-1} \text{ ऐसा होगा ।}$$

इस श्रेणी में यदि ज्या<sup>-1</sup>  $y = \frac{2\pi}{12}$  तो  $y = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots$$

(४) यदि  $s = \cos^{-1} y$  तो यदि  $y = 0$  तो  $t = 0$  ।

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{1}{1 + y^2} = 1 - y^2 + y^4 - y^6 + \dots$$

$$= t_1 + 2t_2 \cdot \frac{y}{1 \cdot 2} + 3t_3 \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3} + 4t_4 \cdot \frac{y^5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

(३) उदाहरण के ऐसा यहाँ भी  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 0$  ।

$$\frac{t_3}{2} = -1 \therefore t_3 = -2 \quad t_4 = 0$$

$$\frac{t_4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1 \therefore t_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\therefore s = y - \frac{2y^3}{2 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 y^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} - \dots$$

वा,  $\cos^{-1} y = y - \frac{y^3}{2} + \frac{y^5}{2} - \frac{y^7}{6} + \dots$  । इस में यदि  $y = 1$

$$\text{तो } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\text{जब कि } \frac{\pi}{4} = \cos^{-1} \frac{1}{2} + \cos^{-1} \frac{1}{2}$$

$$\text{और } \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^3} + \frac{1}{2 \cdot 2^5} - \frac{1}{6 \cdot 2^7} + \dots$$

$$\cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^3} + \frac{1}{2 \cdot 2^5} - \frac{1}{6 \cdot 2^7} + \dots$$

$$\text{इस लिये } \frac{\pi}{4} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) + \dots$$

और जब कि  $\frac{\pi}{x} = 48x^{-1} \frac{1}{2} - 8x^{-1} \frac{1}{239}$  तो, पूर्व युक्ति से

$$\frac{\pi}{x} = 4 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1}{6 \cdot 2^6} + \dots \right\} \\ - \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{4(239)^4} - \frac{1}{6(239)^6} + \dots \right\} ।$$

( ५ ) यदि स = ला ( १ + य ) तो यदि य = ० तो त = ० ।

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots$$

$$= त_1 + २ त_2 \frac{y}{२} + ३ त_3 \frac{y^2}{२ \cdot ३} + \dots$$

अथ टीक तीसरे वा चौथे उदाहरण की विधि से स का मान लावो तो

$$स = ला ( १ + य ) = य - \frac{y^2}{२} + \frac{y^3}{३} - \frac{y^4}{४} + \dots$$

परन्तु यहाँ अन्योन्याश्रित दोष पड़ता है इस लिये द्वितीयाध्याय के दूसरे सिद्धान्त की विधि लघुरिक्त निकालने के लिये बहुत उत्तम है ।

जब कि द्वियुक्पद सिद्धान्त म्याक्कारिन् के सिद्धान्त ही से उत्पन्न होता है और द्वियुक्पद सिद्धान्त से लघुरिक्त का सिद्धान्त उत्पन्न होता है इस लिये अन्योन्याश्रय दोष का निवारण भी हो सकता है ।

( ६ ) दूसरे अध्याय के दूसरे सिद्धान्त के

$$अ^y = 1 + (ला_३अ) य + (ला_३अ)^2 \frac{y^2}{१ \cdot २} + \dots (१)$$

इस समीकरण में इ = अ कल्पना करें तो (१)

$$\text{इस का मान इ}^y = 1 + य + \frac{y^2}{१ \cdot २} + \frac{y^3}{१ \cdot २ \cdot ३} + \dots (२)$$

ऐसा होगा ।

(२) इस समीकरण में यदि य = य  $\sqrt{-१}$  वा य = - य  $\sqrt{-१}$

$$\text{तो इ}^y \sqrt{-१} = 1 + य \sqrt{-१} - \frac{y^2}{१ \cdot २} - \frac{y^3 \sqrt{-१}}{१ \cdot २ \cdot ३} + \dots$$

$$z^{-y}\sqrt{-1} = 1 - y\sqrt{-1} - \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

इन दोनों को परस्पर घटा और जोड़ देने से,

$$z^y\sqrt{-1} - z^{-y}\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} \left( y - \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right)$$

$$z^y\sqrt{-1} + z^{-y}\sqrt{-1} = 2 \left( 1 - \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right)$$

इस लिये दूसरे उदाहरण को देखने से,

$$\frac{z^y\sqrt{-1} - z^{-y}\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = ज्याय। \quad \frac{z^y\sqrt{-1} + z^{-y}\sqrt{-1}}{2} = कोज्याय \dots (३)$$

(३) समीकरण से,

$$z^{\pm y}\sqrt{-1} = कोज्याय \pm ज्याय\sqrt{-1}$$

$$\therefore z^{\pm my}\sqrt{-1} = (कोज्याय \pm ज्याय\sqrt{-1})^m \dots (क)$$

परन्तु (३) समीकरण में यदि  $y = my$

$$\text{तो } \frac{z^{my}\sqrt{-1} - z^{-my}\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = ज्यामय।$$

$$\frac{z^{my}\sqrt{-1} + z^{-my}\sqrt{-1}}{2} = कोज्यामय।$$

$$\therefore z^{\pm my}\sqrt{-1} = कोज्यामय \pm ज्यामय\sqrt{-1} \dots (ख)$$

इस लिये (क) और (ख) ये दोनों समान हुए अर्थात्

$$(कोज्याय \pm ज्याय\sqrt{-1})^m = कोज्यामय \pm ज्यामय\sqrt{-1} \dots (ग)$$

इसी को "डेमाइवर" (De Moivre) का सिद्धान्त कहते हैं।

(घ) छठवें उदाहरण के (ख) समीकरण से,

$$z^{my}\sqrt{-1} = कोज्यामय + ज्यामय\sqrt{-1}$$

$$z^{-my}\sqrt{-1} = कोज्यामय - ज्यामय\sqrt{-1}$$

परस्पर भाग देने से,

$$\frac{z^{my}\sqrt{-1}}{z^{-my}\sqrt{-1}} = z^{2my}\sqrt{-1} = \frac{कोज्यामय + ज्यामय\sqrt{-1}}{कोज्यामय - ज्यामय\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1 + \text{स्पमय}\sqrt{-1}}{1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1}} \text{। दोनों का लघुरिक्त्य लेने से,}$$

$$2 \text{ मय}\sqrt{-1} = \text{ला} (1 + \text{स्पमय}\sqrt{-1}) - \text{ला} (1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1})$$

अब यहां पांचवें उदाहरण से  $y = \pm \text{स्पमय}\sqrt{-1}$

ऐसा मान कर लघुरिक्त्यों का अन्तर निकालो तो

$$2 \text{ मय}\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} \left( \text{स्पमय} - \frac{\text{स्प}^3\text{मय}}{3} + \frac{\text{स्प}^5\text{मय}}{5} - \frac{\text{स्प}^7\text{मय}}{7} + \dots \right)$$

$$\therefore \text{मय} = \text{स्पमय} - \frac{\text{स्प}^3\text{मय}}{3} + \frac{\text{स्प}^5\text{मय}}{5} - \frac{\text{स्प}^7\text{मय}}{7} + \dots \text{।}$$

यह ठीक चौथे उदाहरण के ऐसा उत्पन्न होता है ।

$$\text{इसी प्रकार जब, } 2\sqrt{-1} = \frac{1 + \text{स्पमय}\sqrt{-1}}{1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1}}$$

$$\therefore 2\sqrt{-1} + 1 = \frac{2}{1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1}}$$

$$\text{और } 2\sqrt{-1} - 1 = \frac{2 \text{ स्पमय}\sqrt{-1}}{1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1}} \text{। परस्पर भाग देने से,}$$

$$\frac{2\sqrt{-1} - 1}{2\sqrt{-1} + 1} = \text{स्पमय}\sqrt{-1}$$

इन दोनों का वर्ग एक में घटा देने से,

$$\frac{4\sqrt{-1} - 1}{(2\sqrt{-1} + 1)^2} = 1 + \text{स्प}^2\text{मय} = 2\sqrt{-1}$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1} + 1} = 2\sqrt{-1}$$

प्रसङ्ग से और उदाहरणों को दिखाते हैं ।

(८) जब स्पष्ट है कि

$y = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$  इत्यादि हो तो ज्याय = 0 तो

ज्याय = अ.य (  $\pi^2 - y^2$  ) (  $2^2\pi^2 - y^2$  ) (  $3^2\pi^2 - y^2$  ) ... ऐसी

कल्पना कर सकते हैं, इस में यदि  $k = \alpha \cdot \pi^2 \cdot 2^2 \pi^2 \cdot 3^2 \pi^2 \dots$

$$\text{तो ज्याय} = k \cdot y \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots$$

$$\text{और } \frac{\text{ज्याय}}{y} = k \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots$$

अब यहाँ यदि  $y = 0$  तो  $\frac{\text{ज्याय}}{y} = 1 = k$

$$\text{इस लिये ज्याय} = y \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots (1)$$

इसी प्रकार जब  $y = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}$  इत्यादि

तो, कोज्याय = 0, इस लिये

$$\text{कोज्याय} = \alpha \left(\frac{\pi^2}{2^2} - y^2\right) \left(\frac{3^2 \pi^2}{2^2} - y^2\right) \left(\frac{5^2 \pi^2}{2^2} - y^2\right) \dots \text{इत्यादि}$$

ऐसा मान सकते हैं। यहाँ भी यदि  $k = \alpha \cdot \frac{\pi^2}{2^2} \cdot \frac{3^2 \pi^2}{2^2} \dots$

$$\text{तो, कोज्याय} = k \left(1 - \frac{2^2 y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 y^2}{3^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 y^2}{5^2 \pi^2}\right) \dots$$

यहाँ भी यदि  $y = 0$  तो कोज्याय = 1 = k

$$\text{इस लिये कोज्याय} = \left(1 - \frac{2^2 y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 y^2}{3^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 y^2}{5^2 \pi^2}\right) \dots (2)$$

(९) आठवें उदाहरण में (१) इस में यदि दूसरे पक्ष का स्वरूप  $y \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right)$  इत्यादि का घात करके बनायो

$$\text{तो, ज्याय} = y \left\{ 1 - \frac{y^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \right\} + \dots$$

परन्तु दूसरे उदाहरण से,

$$\text{ज्याय} = y \left( 1 - \frac{y^2}{2 \cdot 3} + \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right)$$

इस लिये य के समान घातों के गुणकों को समान करने से,

$$\frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{6} ।$$

$$\text{वा, } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{n^2}{6} \dots \dots (१) ।$$

इसी प्रकार आठवें उदाहरण के (२) इस में भी यदि घात कर दूसरे पक्ष का रूप बनावो तो,

$$\text{कोज्याय} = 1 - \frac{2^2 y^2}{n^2} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) + \dots$$

परन्तु दूसरे उदाहरण के समीकरण से,

$$\text{कोज्याय} = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \dots$$

इस लिये यहाँ भी दोनों पक्षों में य के समान घातों के गुणकों को समान करने से,

$$\frac{2^2}{n^2} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \dots \right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \dots = \frac{n^2}{2} \dots \dots (२) ।$$

(१०) नवें उदाहरण के (१) और (२) समीकरणों का अन्तर करने से,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \dots = \frac{n^2}{24} \dots \dots (१)$$

दोनों को जोड़ देने से,

$$2 \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \frac{7n^2}{24}$$

$$\therefore \frac{2}{7} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) + \frac{1}{7} \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \frac{n^2}{24}$$

इस प्रकार जोड़ घटा कर अनेक समीकरण बना सकते हो ।



(११) जय आठवें चदाहरण से यह सिद्ध है कि,

$$\text{ज्याय} = y \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{3^2\pi^2}\right) \dots$$

तो दोनों पक्षों का लघुरिक्य लेने से,

$$r = \text{ला (ज्याय)} = \text{ला } y + \text{ला} \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) + \text{ला} \left(1 - \frac{y^2}{2^2\pi^2}\right) + \dots (१)$$

(१) इसका तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$\frac{\text{तार}}{\text{साय}} = \frac{\text{कोज्याय}}{\text{ज्याय}} = \frac{1}{y} - \frac{\frac{2y}{\pi^2}}{1 - \frac{y^2}{\pi^2}} - \frac{\frac{2y}{2^2\pi^2}}{1 - \frac{y^2}{2^2\pi^2}} - \dots$$

$$\text{या, } \frac{1}{1-y} = \frac{1}{y} - \frac{\frac{2y}{\pi^2}}{1 - \frac{y^2}{\pi^2}} - \frac{\frac{2y}{2^2\pi^2}}{1 - \frac{y^2}{2^2\pi^2}} - \dots (२)$$

अब यदि  $\frac{y^2}{\pi^2} = y^2$  तो  $y^2 = \pi^2 \cdot y^2 \therefore y = \pi y$ ,

और  $\frac{2y}{\pi^2} = \frac{2y}{\pi^2}$  इन पर से दूसरे समीकरण का रूप,

$$\frac{1}{1-y} = \frac{1}{\pi \cdot y} - \frac{2y}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{2^2-y^2} + \frac{1}{3^2-y^2} + \dots \right\} \dots (३)$$

इसी प्रकार यदि  $\frac{y^2}{\pi^2} = -y^2$  तो,  $y = \pi \cdot y \sqrt{-1}$

और  $\frac{2y}{\pi^2} = \frac{2y\sqrt{-1}}{\pi^2}$  और धातवें चदाहरण से,

$$1 + (\pi \cdot y \sqrt{-1}) = \frac{1}{\sqrt{-1}} - \frac{2\sqrt{-1}\pi y - 1}{2^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 - 2^2\pi y}{1 + 2^2\pi y}$$

$$\therefore \text{ला} (\pi y \sqrt{-1}) = \frac{(1 + 2^2\pi y)\sqrt{-1}}{2 - 2^2\pi y}$$

$$= \frac{1}{\pi p \sqrt{-1}} - \frac{2p\sqrt{-1}}{\pi} \left\{ \frac{1}{1^2+p^2} + \frac{1}{2^2+p^2} + \frac{1}{3^2+p^2} + \dots \right\} \dots (8)$$

(३) समीकरण में समझोधन करने से,

$$\frac{1}{\pi p} - \frac{1}{\pi p \sqrt{-1}} = \frac{2p}{\pi} \left\{ \frac{1}{1^2-p^2} + \frac{1}{2^2-p^2} + \frac{1}{3^2-p^2} + \dots \right\}$$

चा,  $\frac{1}{2p^2} - \frac{\pi}{2p \cdot \pi p} = \frac{1}{1^2-p^2} + \frac{1}{2^2-p^2} + \frac{1}{3^2-p^2} + \dots$  (५) ।

इस प्रकार चौथे समीकरण से,

$$\frac{\pi}{2p} \cdot \frac{1}{\pi p} + \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2p^2} = \frac{1}{1^2+p^2} + \frac{1}{2^2+p^2} + \frac{1}{3^2+p^2} + \dots (6)$$

(१२) आठवें उदाहरण से जो

$$\text{कोज्याय} = \left(1 - \frac{2^2 y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 y^2}{3^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 y^2}{5^2 \pi^2}\right) \dots$$

यह सिद्ध है, इस का लघुरिक्त्य लेने से,

$$\text{ला(कोज्याय)} = \text{ला}\left(1 - \frac{2^2 y^2}{\pi^2}\right) + \text{ला}\left(1 - \frac{2^2 y^2}{3^2 \pi^2}\right) + \text{ला}\left(1 - \frac{2^2 y^2}{5^2 \pi^2}\right) \dots (7)$$

(१) इस के दोनों पक्षों का तारकालिङ्गसम्बन्ध निकाल श्रृण एक से गुण देने से,

$$\frac{\text{व्याय}}{\text{कोज्याय}} = \frac{\frac{2y}{\pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{\pi^2}} + \frac{\frac{2y}{3^2 \pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{3^2 \pi^2}} + \frac{\frac{2y}{5^2 \pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{5^2 \pi^2}} + \dots$$

$$= 2y \left\{ \frac{\frac{2^2}{\pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{\pi^2}} + \frac{\frac{2^2}{3^2 \pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{3^2 \pi^2}} + \frac{\frac{2^2}{5^2 \pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{5^2 \pi^2}} + \dots \right\}$$

$$= 2y \left\{ \frac{\frac{2^2}{\pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{\pi^2}} + \frac{\frac{2^2}{3^2 \pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{3^2 \pi^2}} + \frac{\frac{2^2}{5^2 \pi^2}}{1 - \frac{2^2 y^2}{5^2 \pi^2}} + \dots \right\} \dots (2)$$

यहाँ भी कल्पना करो कि  $\frac{r^2 y^2}{\pi^2} = p^2 \therefore y = \frac{\pi \cdot p}{r}$

और  $r y \cdot \frac{r^2}{\pi^2} = \frac{4p}{\pi}$  तो दूसरे समीकरण का रूप,

$$r y = r \frac{\pi \cdot p}{r} = \frac{4p}{\pi} \left\{ \frac{1}{1^2 - p^2} + \frac{1}{3^2 - p^2} + \frac{1}{5^2 - p^2} + \dots \right\}$$

$$\therefore \frac{1}{1^2 - p^2} + \frac{1}{3^2 - p^2} + \frac{1}{5^2 - p^2} + \dots = \frac{\pi}{4p} \cdot r \frac{\pi \cdot p}{r} \dots (2)$$

इसी प्रकार यदि  $\frac{r^2 y^2}{\pi^2} = -p^2$  तो  $r y = \pi p \sqrt{-1}$

$$r y \sqrt{-1} = -\pi p \text{ और } r y \frac{r^2}{\pi^2} = \frac{4p \sqrt{-1}}{\pi}$$

अब यहाँ भी सातवें उदाहरण से,

$$r y = r \frac{\pi p \sqrt{-1}}{r} = \frac{4 \pi p - 1}{4 \pi p + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1 - 4 \pi p}{1 + 4 \pi p} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{4p \sqrt{-1}}{\pi} \left\{ \frac{1}{1^2 + p^2} + \frac{1}{3^2 + p^2} + \frac{1}{5^2 + p^2} + \dots \right\}$$

$$\therefore \frac{1}{1^2 + p^2} + \frac{1}{3^2 + p^2} + \frac{1}{5^2 + p^2} + \dots = -\frac{\pi}{4p} \cdot \frac{1 - 4 \pi p}{1 + 4 \pi p}$$

$$= \frac{\pi}{4p} \cdot \frac{4 \pi p - 1}{4 \pi p + 1}$$

(१३) बारहवें उदाहरण के (३) समीकरण में

$$\text{जो } \frac{\pi}{4p} \cdot r \frac{\pi \cdot p}{r} \text{ है इसको } \frac{\pi}{4p} \cdot \frac{\pi \cdot p}{r} \cdot \frac{r \pi p}{\pi \cdot p}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{r \pi p}{\pi \cdot p}$$

ऐसे भी लिखा सकते हो, :

अब उसी समीकरण में यदि  $\psi = 0$  मानो तो दहिने ओर का पक्ष  $\frac{\pi^2}{c}$  के तुल्य होगा और बायें ओर का पक्ष  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$  इसके तुल्य होगा,

$$\text{इस लिये } \frac{\pi^2}{c} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

यही ठोक नवें उदाहरण के (२) समीकरण से भी सिद्ध हुआ है ।

(१४) यदि ज्यास = म.ज्याय तो स = ज्या<sup>-1</sup>(म.ज्याय) = ज्या<sup>-1</sup> र यहाँ र = म.ज्याय, अब यहाँ य = 0 तो त = 0 ।

फिर तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा से,

$$\frac{\text{वास}}{\text{तार}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \text{ परन्तु } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{म.कोज्याय}$$

$$\therefore \frac{\text{वास}}{\text{तार}} \times \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताम}}{\text{ताय}} = \frac{\text{म.कोज्याय}}{\sqrt{1-m^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य}}} = \text{म.त. यदि य} = 0 \text{ ।}$$

$$\frac{\text{ता}^3 \text{स}}{\text{ताय}^3}$$

$$= \frac{-\text{म.ज्याय} \sqrt{1-m^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य}} + \text{म}^3 \cdot \text{कोज्या}^3 \text{य} (1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य})^{-\frac{3}{2}} \cdot \text{ज्याय}}{1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य}}$$

यहाँ यदि य = 0, तो त<sub>२</sub> = 0 ।

$$\frac{\text{ता}^3 \text{स}}{\text{ताय}^3}$$

$$= \frac{-\text{म.कोज्याय} \sqrt{1-\text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य}} + \text{म}^3 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य} \cdot \text{कोज्याय} (1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य})^{-\frac{3}{2}}}{1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य}}$$

$$- \frac{2 \text{म}^3 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य} \cdot \text{कोज्याय} (1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य})^{-\frac{3}{2}}}{1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य}}$$

$$+ \frac{\text{म}^3 \cdot \text{कोज्या}^3 \text{य} (1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य})^{-\frac{3}{2}}}{1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य}}$$

$$+ \frac{\text{म}^4 \cdot \text{कोज्या}^3 \text{य} \cdot \text{ज्या}^2 \text{य} (1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य})^{-\frac{3}{2}}}{1 - \text{म}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{य}}$$

$$+ ता \{ 1 - m^2 \cdot ज्या^2 y \}$$

$$\left\{ \frac{म \cdot ज्याय \sqrt{1 - m^2 \cdot ज्या^2 y} - m^2 \cdot कोज्या^2 y \cdot ज्याय (1 - m^2 \cdot ज्या^2 y)^{-\frac{1}{2}}}{(1 - m^2 \cdot ज्या^2 y)^2} \right\}$$

$$\text{अथ, यदि } y=0 \text{ तो, } t_3 = -m + m^3 = m(m^2 - 1)$$

इन को (२०) वें प्रक्रम में जो न्याक्लारिन् का सिद्धान्त है उसमें स्थापन देने से,

$$\begin{aligned} s &= म \cdot य + \frac{म(m^2 - 1)}{२ \cdot ३} y^3 + \dots \\ &= म \cdot य + \frac{म(म+१)(म-१)}{३} y^3 + \frac{म(m^2-1)(३म+१)(३म-१)}{५} y^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{अथ वा इस उदाहरण में जो } \frac{तास}{ताय} = \frac{म \cdot कोज्याय}{\sqrt{1 - m^2 \cdot ज्या^2 y}}$$

यह सिद्ध हुआ है इसमें दहिने पक्ष का रूप य घातवृद्धि में बना कर

$$\text{उसे } t_1 + २t_2 \frac{य}{२} + ३t_3 \frac{य^2}{२ \cdot ३} + \dots$$

इसके समान कर य के समानघातों के गुणकों का तुल्य मानने से भी  $t_1, t_2$  इत्यादि व्यक्त हो जायेंगे ।

(१५)  $s = इ^अ \cdot ज्या^{-१ कय}$  इसमें य के घातवृद्धि में स का मान ले आना है, यहाँ मानो कि  $ज्या^{-१ कय} = र$

$$\left. \begin{aligned} \text{तो } s &= इ^अ \cdot र \\ \therefore \frac{तास}{तार} &= अ \cdot इ^अ र \end{aligned} \right\} \begin{aligned} ज्या^र &= कय \\ \therefore \frac{तार}{ताय} &= \frac{क}{\sqrt{1 - क^2 य^2}} \end{aligned}$$

$$\text{और, } \frac{तास}{ताय} = \frac{अ \cdot क \cdot इ^अ र}{\sqrt{1 - क^2 य^2}} ।$$

$$\text{या, } \frac{तास}{ताय} = \frac{अ \cdot क \cdot म}{\sqrt{1 - क^2 य^2}}$$

परन्तु न्याक्लारिन् के सिद्धान्त से,

$$स = त + त_1 \cdot य + त_2 \cdot \frac{य^2}{१ \cdot २} + त_3 \cdot \frac{य^3}{२ \cdot ३} + \dots$$

$$\frac{ताम}{ताय} = त_1 + २ त_2 \cdot \frac{य^3}{१ \cdot २} + ३ त_3 \cdot \frac{य^2}{२ \cdot ३} + \dots$$

और द्वियुक्पदसिद्धान्त से,

$$\begin{aligned} &= (१ - क^२ \cdot य^२)^{-३} = १ + \frac{१}{२} क^२ \cdot य^२ + \frac{१ \cdot ३}{२ \cdot ४} क^४ \cdot य^४ \\ &+ \frac{१ \cdot ३ \cdot ५}{२ \cdot ४ \cdot ६} क^६ \cdot य^६ + \dots \end{aligned}$$

इसलिये

$$\frac{अ \cdot क \cdot स}{\sqrt{१ - क^२ \cdot य^२}} = अक \left\{ त + त_1 \cdot य + त_2 \cdot \frac{य^२}{१ \cdot २} + त_3 \cdot \frac{य^३}{२ \cdot ३} + \dots \right. \\ \left. + त \cdot \frac{क^२ \cdot य^२}{२} + त_1 \cdot क^२ \cdot \frac{य^३}{१ \cdot २} + \dots \right\}$$

इन पर से,

$$\begin{aligned} &त_1 + २ त_2 \frac{य}{२} + ३ त_3 \cdot \frac{य^२}{२ \cdot ३} + ४ त_४ \cdot \frac{य^३}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \dots \\ &= अक \left\{ त + त_1 \cdot य + \frac{य^२}{२} (त_२ + क^२ \cdot त) + \frac{य^३}{२ \cdot ३} (त_३ + ३ त_१ \cdot क^२) + \dots \right\} \end{aligned}$$

य के समानघातों का गुणक समान करने से,

$$अकत = त_१, अकत_१ = त_२, त_३ = अक (त_३ + क^२ \cdot त)$$

पैसा हुआ । परन्तु प्रथम समीकरण में यदि य = ०

तो त = १ इस लिये त\_१ = अक । अक^२ = त\_२ ।

$$त_३ = अक ( अक^२ + क^२ ) ।$$

$$त_४ = (त_३ + ३ त_१ क^२) अक = अक (अक^३ \cdot क^३ + ४ अ \cdot क^३)$$

$$= अक^३ \cdot क^३ ( अक^३ + २^३ ), इत्यादि$$

इसका स्थापन ग्याम्लारिन के सिद्धान्त में देने से,

$$\begin{aligned}
 स &= 1 + अ \cdot क \cdot य + \frac{अ^2 \cdot क^2 \cdot य^2}{1 \cdot 2} + अ \cdot क^3 (अ^2 + 1) \cdot \frac{य^3}{2 \cdot 3} \\
 &+ अ^2 \cdot क^4 (अ^2 + 2^2) \cdot \frac{य^4}{1 \cdot 4} + अ \cdot क^5 (अ^2 + 1) (अ^2 + 3^2) \cdot \frac{य^5}{1 \cdot 5} + \dots \\
 &= 1 + अ \cdot \frac{क \cdot य}{1} + अ^2 \cdot \frac{क^2 \cdot य^2}{1 \cdot 2} + अ \cdot (अ^2 + 1) \cdot \frac{क^3 \cdot य^3}{2 \cdot 3} \\
 &+ अ^2 (अ^2 + 2^2) \cdot \frac{क^4 \cdot य^4}{1 \cdot 4} + अ (अ^2 + 1) (अ^2 + 3^2) \cdot \frac{क^5 \cdot य^5}{1 \cdot 5} + \dots
 \end{aligned}$$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि प्रत्येक पद में, क·य के घातों का गुणकाङ्क गु<sub>1</sub>, गु<sub>2</sub>, गु<sub>3</sub> इत्यादि मानो जहाँ क·य के शून्य घात का गुणक गु<sub>0</sub> = 1 है

$$\text{तो, गु}_{n+1} = \frac{अ^2 + (n-1)^2}{1} \cdot \text{गु}_n \text{ ऐसा सिद्ध होता है ।}$$

इन गुणकों को और प्रकार से भी जान सकते हो ।

(१६) स = ज्या (म·ज्या<sup>-१</sup>य), इसका मान य के घातवृद्धि में लाना है ।

$$\text{मानो } r = ज्या^{-१} य, \text{ तो } \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = म \cdot कोज्यामर$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{१-य^२}} \therefore \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{म \cdot कोज्या (म \cdot ज्या^{-१} य)}{\sqrt{१-य^२}} ।$$

$$\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{ताय}^२} = \frac{-म^२ \cdot ज्या (म \cdot ज्या^{-१} य) + य \cdot म \cdot कोज्या (म \cdot ज्या^{-१} य) (१-य^२)^{-३/२}}{१-य^२}$$

$$\therefore (१-य^२) \frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{ताय}^२}$$

$$= -म^२ \cdot ज्या (म \cdot ज्या^{-१} य) + य \cdot म \cdot कोज्या (म \cdot ज्या^{-१} य) (१-य^२)^{-३/२}$$

और  $\frac{\text{ताम}}{\text{ताय}}$  य = य · म · कोज्या (म · ज्या<sup>-१</sup>य) (१-य<sup>२</sup>)<sup>-३/२</sup> दोनों का अन्तर करने से,

$$y \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} - (1 - y^2) \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = m^2 \cdot ज्या (m \cdot ज्या^{-1}y) = m^2 \cdot स ।$$

परन्तु म्याकूलारिन् के सिद्धान्त से,

$$स = त + त_1 \cdot y + त_2 \cdot \frac{y^2}{2} + त_3 \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3} + त_4 \cdot \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = त_1 + 2त_2 \cdot \frac{y}{2} + 3त_3 \cdot \frac{y^2}{2 \cdot 3} + 4त_4 \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = त_2 + त_3 y + त_4 \cdot \frac{y^2}{2} + त_5 \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

इन पर से,

$$y \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = त_1 y + 2त_2 \cdot \frac{y^2}{2} + 3त_3 \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

$$(1 - y^2) \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = त_2 + त_3 y + त_4 \cdot \frac{y^2}{2} + त_5 \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

$$- त_2 y^2 - त_3 y^3 - त_4 \frac{y^4}{2} - \dots$$

$$= त_2 + त_3 y + \frac{y^2}{2} (त_4 - 2त_2) + \frac{y^3}{2 \cdot 3} (त_5 - 6त_3) + \dots \text{और}$$

$$y \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} - (1 - y^2) \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = -त_2 + y(त_1 - त_3) + \frac{y^2}{2} (4त_2 - त_4) + \dots$$

$$\text{इस लिये, } m^2 \cdot त + m^2 \cdot त_1 y + m^2 \cdot त_2 \frac{y^2}{2} + m^2 \cdot त_3 \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

$$= m^2 \cdot स = -त_2 + (त_1 - त_3)y + (4त_2 - त_4) \frac{y^2}{2} + (9त_3 - त_5) \frac{y^3}{2 \cdot 3} \dots$$

य के समानपाठों का गुणक समान करने से,

$$-m^2 \cdot त = त_2, \quad m^2 \cdot त_1 = त_1 - त_3 \quad \therefore त_3 = (1 - m^2) त_1$$

$$\text{और } m^2 \cdot त_2 = 4त_2 - त_4 \quad \therefore त_4 = (4 - m^2) त_2$$

$$m^2 \cdot त_3 = 9त_3 - त_5 \quad \therefore त_5 = (9 - m^2) त_3$$

$$\text{सामान्यतः } त_{n+2} = (n^2 - m^2) त_n$$



परन्तु पूर्वसमीकरण में यदि  $y=0$  तो  $s=0=t$

इस लिये,  $t_2=0$  और  $\frac{तास}{ताय}$  इस का मान  $=m$ , यदि  $y=0$

अर्थात्  $t_n=m$ ,

ऊपर  $t_1, t_2$  इत्यादि मानों को देखने से स्पष्ट है कि जब  $t_2=0$  तो  $t_3, t_4, t_5$  इत्यादि सब शून्य के तुल्य होंगे, और  $t_n=m$  इस लिये, केवल  $t_3, t_4$  इत्यादि के मान  $t_{n+2}=(n^2-m^2)t_n$  इस पर से लाकर म्याक्लारिच के सिद्धान्त में स्थापन देने से,

$s=ज्या (m \cdot ज्या^{-1}y)$

$$=m \cdot y + m(1^2-m^2)\frac{y^3}{|३|} + \frac{m(1^2-m^2)(3^2-m^2)}{|५|}y^5 + \dots (१)$$

इसी प्रकार यदि  $s=कोज्या (m \cdot ज्या^{-1}y)$  तो  $s=कोज्या (m \cdot ज्या^{-1}y)$

$$=1 - \frac{m^2}{|२|} \cdot y^2 - \frac{m^2(2^2-m^2)}{|४|}y^4 - \frac{m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)}{|६|}y^6 - \dots (२)$$

(१) समीकरण के वर्ग को एक में घटाकर बीजगणित की रीति से मूल लेने से भी (२) समीकरण उत्पन्न हो सकता है ।

(१७)  $\frac{y}{इ^y-1} = s$ , इसे  $y$  के घातवृद्धि में ले आना चाहिये ।

यहाँ छठवें उदाहरण के (२) समीकरण से,

$$इ^y = 1 + y + \frac{y^2}{२} + \frac{y^3}{३} + \frac{y^4}{४} + \dots \quad \text{इस लिये,}$$

$$\frac{y}{इ^y-1} = \frac{1}{1 + \frac{y}{२} + \frac{y^2}{|३|} + \frac{y^3}{|४|} + \frac{y^4}{|५|} + \dots}$$

केवल भागहार से अथ सिद्ध हो जायगा कि,

$$\frac{y}{इ^y-1} = 1 - \frac{y}{२} + \frac{y^2}{१२} - \frac{y^4}{७२०} + \dots$$

$$= 1 - \frac{y}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{1}{20} \cdot \frac{y^4}{24} + \dots$$

$$= 1 - \frac{y}{2} + w_1 \cdot \frac{y^2}{2} - w_3 \cdot \frac{y^4}{24} + w_5 \cdot \frac{y^6}{720} - w_7 \cdot \frac{y^8}{40320} + \dots$$

$$\text{यहाँ } w_1 = \frac{1}{6}, w_3 = \frac{1}{20}, w_5 = \frac{1}{42}, w_7 = \frac{1}{30}$$

और  $w_9 = \frac{1}{42}$  इत्यादि सिद्ध होते हैं ।

इस  $w_1, w_3$  इत्यादि के मान को बर्नौली (Bernoulli) की संख्या कहते हैं क्योंकि सबसे पहले इन संख्याओं को जेम्स बर्नौली (James Bernoulli) साहब ने प्रकाश किया था इस लिये उन के आदरार्थ उन के नाम के साथ ये संख्यायें बोली जाती हैं । यद्यपि इन संख्याओं का परस्पर सम्बन्ध अभी नहीं देख पड़ता है तथापि इनसे बहुत उदाहरणों की सिद्धि लाभ से हो जाती है ।

$$\frac{y}{e^y - 1} = f(y) \text{ यदि कल्पना करो तो स्पष्ट है कि } f(y) = f(-y)$$

इसमें केवल  $y$  के जितने विषमघात होंगे उनके दूने तुल्य शेष बचेंगे क्योंकि समघात तो दोनों समोद्धरणों में घन हो होगा इस लिये घटाने

$$\text{में सब रद्द जायेंगे, परन्तु जब } f(y) = \frac{y}{e^y - 1}$$

$$\text{इस लिये } f(-y) = -\frac{y}{e^{-y} - 1} = -\frac{y \cdot e^y}{1 - e^y} = \frac{y \cdot e^y}{e^y - 1}$$

$$\text{और, } f(y) - f(-y) = -y \left( \frac{e^y - 1}{e^y - 1} \right) = -y$$

इस से भी सिद्ध होता है कि  $\frac{y}{e^y - 1}$  इसके मान में  $y$  का एक घात छोड़ और कोई विषमघात नहीं है ।

$$\text{जब, } \frac{y}{e^y - 1} = f(y), \text{ तो } e^y \cdot f(y) = y + f(y) \dots (1)$$

( १ ) इस समीकरण में दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा निकाल ग्याक्लारिन् के सिद्धान्त से भी  $y_1, y_2$  इत्यादि के मान प्रकट हो सकते हैं । इस प्रकार ग्याक्लारिन् के सिद्धान्त के बल से अनेक प्रकार के चमत्कृत नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं ।

इन सत्रहों उदाहरणों पर विद्यार्थियों को चाहिये कि विशेष ध्यान दें क्योंकि इनके बल से अनेक उदाहरण बड़े लाघव से सिद्ध हो जाते हैं ।

२१ । यदि  $f(y + x)$  यह  $y + x$  का फल हो तो  $y$  को चल, और  $x$  को स्थिर मान इसका जो तात्कालिकसम्बन्ध होगा वही तात्कालिकसम्बन्ध  $x$  को चल, और  $y$  को स्थिर मानने से भी सिद्ध होता है क्योंकि,

यदि  $y + x = z$  तो प्रथमस्थिति में अर्थात्  $y$  को चल और  $x$  को स्थिरमान,

$$\frac{\text{ताफ}(y+x)}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताफ}(z)}{\text{ताz}} \cdot \frac{\text{ताz}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताफ}(z)}{\text{ताz}} = f'(z)$$

$$\text{क्योंकि, } y + x = z, \therefore \frac{\text{ताz}}{\text{ताय}} = 1 ।$$

और दूसरी स्थिति में अर्थात्  $y$  को स्थिर और  $x$  को चल मान

$$\frac{\text{ताफ}(y+x)}{\text{ताx}} = \frac{\text{ताफ}(z)}{\text{ताz}} \cdot \frac{\text{ताz}}{\text{ताx}} = \frac{\text{ताफ}(z)}{\text{ताz}} = f'(z)$$

$$\text{क्योंकि, यहाँ भी } \frac{\text{ताz}}{\text{ताx}} = 1 ।$$

२२ ।  $f(y + x)$  का मान  $x$  के घातवृद्धि में जानना है । करना करो कि,

$$f(y + x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (१)$$

जहाँ  $a_0, a_1, a_2$  इत्यादि  $x$  के अपेक्षा स्वतन्त्र हैं ।

$$\text{तब, } \frac{\text{ताफ}(y+x)}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताa}_0}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताa}_1}{\text{ताय}} x + \frac{\text{ताa}_2}{\text{ताय}} x^2 + \dots \quad (२)$$

$$\text{और } \frac{\text{ताफ}(y+x)}{\text{ताx}} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \quad (३)$$

परन्तु २१ प्रक्रम से दूसरा और तीसरा सरूपसमीकरण अवश्य परस्पर तुल्य होंगे इस लिये च के समानघातों के गुणकों को परस्पर तुल्य करने से,

$$अ_१ = \frac{ताअ}{ताय}, अ_२ = \frac{ताअ_१}{२ताय} = \frac{१}{१.२} \cdot \frac{ता^२अ}{ताय^२} ।$$

$$अ_३ = \frac{१}{३} \cdot \frac{ताअ_२}{ताय} = \frac{१}{१.२.३} \cdot \frac{ता^३अ}{ताय^३}, \dots\dots$$

और च का मान शून्य मानने से (१) समीकरण में फ (य) = अ इन पर से (१) समीकरण का रूप

$$फ (य + च) = फ (य) + च \cdot फ'(य) + \frac{च^२}{१.२} फ''(य) + \frac{च^३}{१.२.३} फ'''(य) + \dots\dots + \frac{च^n}{n} \cdot \frac{ता^n फ(य)}{ताय^n} \dots\dots (४)$$

२३ । (४) समीकरण में जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है उसे टेलर (Taylor) साहब वा डाक्टर ब्रुक टेलर (Dr. Brook Taylor) साहब ने सन १७१५ में प्रकाश किया था इसी लिये उनके आदरार्थ इसे डॉ टेलर का सिद्धान्त कहते हैं ।

• टेलर के सिद्धान्त की उत्पत्ति मिस्टर होमरशम कोक्स (Mr. Homersham cox) की ही हुयी । कल्पना करो कि फ (य) का मान शून्य के समान होता है यदि य = अ और य = क तो फ (य) अवश्य य के अ और क मान के बीच में घटता बढ़ता रहेगा अर्थात् कुछ मान तक बढ़ेगा फिर आगे घटेगा इस दशा में फ'(य) अवश्य य के अ और क के बीच किसी मान में शून्य होगा क्योंकि यदि ऐसा न मानो तो कल्पना करो कि फ'(य) यह घटता वा बढ़ता ही चढा जाता है य के अ और क मान तक इस लिये कि फ (य) भी य के अ मान से ले क मान तक घटता ही वा बढ़ता ही चढा जायगा इस लिये फ (य) का मान य के क मान में कभी शून्य के समान न होगा और कल्पना तो ऐसा किया है कि फ (य) य के क मान में भी शून्य के समान है इस लिये यह असम्भव है तब यही सिद्ध होता है कि फ'(य) अवश्य य के अ और क मान के बीच किसी मान में शून्य होगा इसी प्रकार आगे भी सिद्ध

कर सकते हो कि  $f''(y)$  भी  $y$  के  $a$  और  $a_1$  मान के बीच किसी मान में शून्य होगा यहाँ जिस मान में  $f'(y)$  शून्य होता है उस मान का मान  $a_1$  है। इसी प्रकार  $f'''(y)$  इत्यादि भी शून्य के समान  $a$  और  $a$  मान के बीच में किसी मान में होने यह भी सिद्ध हो जायगा।

अब देखो कि,

$$f(a+y) - f(a) - yf'(a) - \frac{y^2}{2} f''(a) - \dots - \frac{y^{(n)}}{n} f^{(n)}(a) - \frac{y^{n+1}}{n+1} \dots \quad (1)$$

यह शून्य के तुल्य होता है, यदि  $y = c$  और  $\mu =$

$$\frac{c^{n+1}}{c^{n+1}} \left\{ f(a+c) - f(a) - cf'(a) - \frac{c^2}{2} f''(a) - \dots - \frac{c^n}{n} f^{(n)}(a) \dots \right\} \quad (2)$$

मानो कि,  $\mu$  का यही मान है जिसे हम स्पष्ट देखते हैं कि  $y$  के अपेक्षा स्वतन्त्र है।

(१) समीकरण, तब भी शून्य होता है यदि  $y = 0$  इस लिये  $y$  के ० और  $c$  मान के बीच में (१) समीकरण अवश्य घटता बढ़ता है इस लिये (१) समीकरण का प्रथम सम्बन्ध—

$$यह, f'(a+y) - f'(a) - yf''(a) - \dots - \frac{y^{n-1}}{n-1} f^{(n)}(a) - \frac{y^n}{n} f^{(n+1)}(a)$$

भी शून्य होगा यदि  $y = y_1$ ,  $\angle c$  और यदि  $y = 0$ । इसी प्रकार चारवार सम्बन्ध निकालने से,

$f^{(n+1)}(a+y) - \mu$  यह भी  $y$  के किसी मान में जो कि  $c$  से अलग है शून्य होगा। मानो कि ऐसा  $y$  का मान  $= p$  है, यहाँ  $p$  कोई भिन्न स्वरूपसंख्या है, तब पश्चान्तर से,  $\mu = f^{(n+1)}(a+p)$

(२) समीकरण से और  $a$  के स्थान में  $y$  का उत्पादन देने से,

$$f(y+c) = f(y) + cf'(y) + \frac{c^2}{2} f''(y) + \dots + \frac{c^n}{n} f^{(n)}(y)$$

+  $\frac{c^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(y+p)$  अब इस पर से  $n$  का मान अनन्त मानने से टेन्सर का विज्ञान्त उपपन्न हो जायगा यदि कोई सम्बन्ध शून्य के तुल्य न हो तो।

“चलनकलन” के विस्तार का मूल यही टेलर का सिद्धान्त है इस के चल से म्याक्लारिन् का भी सिद्धान्त उत्पन्न हो सकता है केवल २२ वें प्रक्रम के (४) समीकरण में  $y=0$  कल्पना कर,  $ch$  के स्थान में  $y$  का उत्थापन देने का मान अनन्त मानना पड़ेगा ।

म्याक्लारिन् साहब ने म्याक्लारिन् सिद्धान्त को सन् १७४२ में प्रकाश किया था परन्तु इसे स्टर्लिंग (Stirling) साहब ने भी उसी सन् के लगभग में प्रकाश किया इस लिये कभी कभी म्याक्लारिन् के सिद्धान्त को स्टर्लिंग का भी सिद्धान्त कहते हैं ।

२४ । इस प्रक्रम में टेलर के सिद्धान्त का अच्छी भाँति धोष होने के लिये कुछ उदाहरण दिये जाते हैं ।

(१) यदि  $f(y+ch) = ज्या(y+ch)$  तो टेलर के सिद्धान्त के पदों के जानने के लिये,

$$f(y) = ज्याय, \quad f'(y) = कोज्याय$$

$$f''(y) = -ज्याय, \quad f'''(y) = -कोज्याय ।$$

इन सब का उत्थापन टेलर के सिद्धान्त में देने से,

$$\begin{aligned} ज्या(y+ch) &= ज्याय + कोज्याय \cdot ch - ज्याय \frac{ch^2}{१ \cdot २} - कोज्याय \frac{ch^3}{१ \cdot २ \cdot ३} \\ &\quad + ज्याय \frac{ch^4}{४} + कोज्याय \frac{ch^5}{५} - \dots \dots \dots (१) \end{aligned}$$

इसी प्रकार कोज्या  $(y+ch)$  का मान भी टेलर के सिद्धान्त से यदि ले भाषो तो,

$$\begin{aligned} कोज्या(y+ch) &= कोज्याय - ज्याय \cdot \frac{ch}{१} - कोज्याय \cdot \frac{ch^2}{१ \cdot २} \\ &\quad + ज्याय \cdot \frac{ch^3}{१ \cdot २ \cdot ३} + कोज्याय \cdot \frac{ch^4}{४} - \dots \dots (२) \text{ ऐसा होगा ।} \end{aligned}$$

यहाँ दोनों अर्थान् प्रथम और दूसरे समीकरण में यदि  $y=0$  तो,

$$ज्याच = च - \frac{ch^2}{२ \cdot ३} + \frac{ch^4}{४} - \frac{ch^6}{६} + \dots \dots$$

$$\text{कोज्याच} = 1 - \frac{\text{च}^2}{1 \cdot 2} + \frac{\text{च}^4}{|4} - \frac{\text{च}^6}{|6} + \dots$$

ठीक म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से भी ऐसा ही उत्पन्न होता है (म्याक्लारिन् के सिद्धान्तसम्बन्धि दूसरा उदाहरण देखो) ।

(२) फ (य + च) = ला (य + च) इसमें फ (य + च) का मान च के घातवृद्धि में ले खाना है ।

$$\text{यहाँ फ (य) = लाय}$$

$$\text{फ}'(\text{य}) = \frac{१}{\text{य}} = \text{य}^{-१}, \text{फ}''(\text{य}) = -\text{य}^{-२} ।$$

$$\text{फ}'''(\text{य}) = २\text{य}^{-३}, \text{फ}''''(\text{य}) = -२ \cdot ३ \cdot \text{य}^{-४} ।$$

इन का टेलर के सिद्धान्त में स्थापन देने से,

$$\begin{aligned} \text{ला (य + च)} &= \text{लाय} + \frac{\text{च}}{\text{य}} - \frac{१}{\text{य}^२} \cdot \frac{\text{च}^२}{२} + \frac{१}{\text{य}^३} \cdot \frac{\text{च}^३}{३} \\ &\quad - \frac{१}{\text{य}^४} \cdot \frac{\text{च}^४}{४} + \dots \dots \dots (१) \end{aligned}$$

(१) इसी समीकरण में यदि य = १ तो,

लाय = ० इस लिये प्रथम समीकरण का रूप,

$$\text{ला (१ + च)} = \text{च} - \frac{\text{च}^२}{२} + \frac{\text{च}^३}{३} - \frac{\text{च}^४}{४} + \dots$$

इसो प्रकार टेलर के सिद्धान्त से द्वियुक्पदसिद्धान्त भी बड़े लापय से उत्पन्न हो सकता है ।

$$(३) \text{फ (य) } \cdot \text{फ (च)} = \text{फ (य + च)} + \text{फ (य - च)}$$

इसमें फ (य) का रूप जानना है ।

यहाँ टेलर के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि,

$$\begin{aligned} \text{फ (य + च)} + \text{फ (य - च)} &= २ \left\{ \text{फ (य)} + \text{फ}''(\text{य}) \frac{\text{च}^२}{१ \cdot २} + \text{फ}''''(\text{य}) \frac{\text{च}^४}{|4} + \dots \right\} \\ &= \text{फ (य)} \cdot \text{फ (च)}, \end{aligned}$$

दोनों पक्षों में, फ (य) का भाग देने से,

$$f(\psi) = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{f(\psi)} \cdot f''(\psi) \frac{\psi^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{f(\psi)} \cdot f'''(\psi) \frac{\psi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right\} \dots (1)$$

अब यहाँ यदि  $\frac{f''(\psi)}{f(\psi)} = -r^2$  तो  $f''(\psi) = -r^2 \cdot f(\psi)$

इस पर से  $f'''(\psi) = -r^2 \cdot f''(\psi) = r^4 \cdot f(\psi)$  इत्यादि

इन का स्थापन (१) इसमें देने से,

$$f(\psi) = 2 \left\{ 1 - \frac{r^2 \cdot \psi^2}{2} + \frac{r^4 \cdot \psi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{r^6 \cdot \psi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right\} = 2 \cos \psi (r \cdot \psi)$$

और इसी समीकरण में  $\psi$  के स्थान में  $\psi$  का स्थापन देने से,

$f(\psi) = 2 \cos \psi (r \cdot \psi)$  और त्रिकोणमिति से भी स्पष्ट है कि

$$2 \cos \psi (r \cdot \psi) \cdot 2 \cos \psi (r \cdot \psi) = f(\psi + \psi) + f(\psi - \psi)$$

$$= 2 \cos \psi (r \cdot \psi + r \cdot \psi) + 2 \cos \psi (r \cdot \psi - r \cdot \psi)$$

इस लिये  $f(\psi)$  का रूप  $2 \cos \psi (r \cdot \psi)$  यही सिद्ध हुआ ।

इस प्रकार से सैकड़ों उदाहरण इस डेलर के और म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से उत्पन्न हो सकते हैं, बहुत लिखना व्यय है । विद्यार्थियों को चाहिये कि ऊपर लिखे हुए उदाहरणों का अच्छी भाँति अभ्यास कर इन के बल से और और भी उदाहरण अपने मन से सोचें ।

हमारे यहाँ संस्कृत ज्योतिषसिद्धान्त ग्रन्थों में जो कहीं कहीं असकृद्विधि लिखे हैं वे सब प्रायः डेलर और म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से उत्पन्न हो सकते हैं ।

२५ । डेलर के सिद्धान्त के बल से बहुधा आसन्नमान से समीकरणों में अव्युत्तरांश का मान भी निकल सकता है, क्योंकि जय स्पष्ट है कि किसी समीकरण का रूप  $f(\psi) = 0$  ऐसा है तब मानो कि अट-कल से एक  $\psi$  का मान  $= k$  और वास्तव में  $\psi = (k + \psi)$  इसलिये  $f(\psi) = f(k + \psi) = 0$  अब इसका मान डेलर के सिद्धान्त से,

$$f(k + \psi) = 0 = f(k) + f'(k) \frac{\psi}{1} + f''(k) \frac{\psi^2}{1 \cdot 2} + \dots (1)$$



(१) इसमें यदि च का मान अति अल्प मानो तो च का दूसरा घात छोड़ देने से,

$$0 = f(k) + f'(k) \cdot c$$

$$\therefore c = -\frac{f(k)}{f'(k)} \text{ इस पर से } y = k - \frac{f(k)}{f'(k)} \dots\dots (2)$$

पुनः (२) इसमें जो य का मान आया है उस का क के स्थान में स्थापन देने से बहुत ठोक य का मान व्यवहारार्थ आजायगा और यदि पुनः पुनः क के मान में स्थापन देकर य का मान लाओ अर्थात् असकृद्विधि करो तो बहुत ही सूक्ष्म य का मान निकल सकता है ।

जैसे,

$$(1) y^3 - 3y^2 + 2y - 6\frac{1}{2} = 0 \text{ इसमें } y \text{ का मान जानना है ।}$$

यहाँ पहले अटकल से  $y = 2$  कल्पना किया तो, २५ वें प्रक्रम से  $k = 2$  और २५ वें प्रक्रम के (२) समीकरण से,

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= y^3 - 3y^2 + 2y - 6\frac{1}{2} \\ \text{ता } f'(y) &= 3y^2 - 6y + 2 \end{aligned} \right\} \text{ इनमें } y \text{ के स्थान में } k \text{ का स्थापन देने से क्रम से दोनों पक्षों के मान,}$$

$$f(k) = 16 - 3 \times 4 + 2 \times 2 - 6\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(k) = 3 \times 4 - 6 \times 2 + 2 = 22$$

$$\therefore c = -\frac{f(k)}{f'(k)} = -\frac{1}{44}$$

$$\text{और } y = k - \frac{f(k)}{f'(k)} = 2 - \frac{1}{44} = 1\frac{43}{44} \text{ यही आसन्नमान से}$$

सतर दृमा ।

$$(2) y^3 - 2y^2 - 25 = 0 \text{ इस में } y \text{ का मान क्या है ?}$$

यहाँ अटकल से पहले  $y = 2$  कल्पना कर

$$f(y) = y^4 - 2y^2 - 25 = -1 \text{ यदि } f(y) = f(2)$$

$$f'(y) = 4y^3 - 4y = 62 \text{ यदि } f'(y) = f'(2)$$

$$\therefore \phi = -\frac{f(k)}{f'(k)} = \frac{1}{62} \text{ और } y = 2 + \frac{1}{62} \text{ यही उत्तर हुआ।}$$

यदि इस  $y$  के मान पर से दूसरा  $y$  का मान ले आवो तो बहुत ही सूक्ष्म होगा ।

(३) दो पुरुष साथ ही परदेश को चले, पहला प्रतिदिन दश दश कोश चलता था और दूसरा पहले दिन एक कोश चल के अपने एक मित्र के घर पर ठहरा और (उस के अनेक मित्र थे जिन का घर एक ही मार्ग में क्रम से २, २<sup>२</sup>, २<sup>३</sup> इत्यादि द्विगुणोत्तर अन्तर पर थे) दूसरे दिन दूसरे मित्र के घर आ ठहर गया यों प्रत्येक मित्रों के घर पर ठहरता हुआ चला तो बतावो कि उन दोनों पुरुषों से भेंट पुनः कितने दिनों पर होगी ?

यहां प्रश्न की धोली से,

१०  $y = 2^y - 1$  ऐसा समीकरण होगा । और यदि  $y = 4$ , तो, दोनों का मान १०, ३१ इस लिये वास्तव  $y$  के मान से ५ यह अल्प है पुनः यदि  $y = 6$  तो दोनों का मान, ६०, ६३ इस लिये वास्तव  $y$  के मान से ६ यह अधिक है अटकल से कल्पना करो कि  $y = 6$  ।

अब  $f(y) = 0 = 2^y - 10y - 1 = 64 - 60 - 1$ ,  
यदि  $f(y) = f(6)$  । और  $f'(y) = 2^y \ln 2 - 10 = 64 \times 0.6931 - 10$   
यदि  $f(y) = f(6)$  । यहां ला २ अर्थात् इ आधार में दो का लघुरिक्त्य = ०.६९३१ यह दो का आसन्न लघुरिक्त्य लेकर पूर्व पक्ष में प्रतिपादन देने से  $f(6) = 3$  ।  $f'(6) = 34.३३९$

$$\therefore \phi = -\frac{f(k)}{f'(k)} = \frac{-3}{34.३३९} = -0.09 \text{ स्वल्पान्तर से,}$$

और  $y = k + \phi = 6 - 0.09 = 5.91$  यही उत्तर हुआ ।

यदि पुनः ५.९१ इस मान पर से य का दूसरा मान ले धावो तो बहुत ही सूक्ष्म होगा ।

२६। टेलर के सिद्धान्त में, यदि  $y = h + r$  कल्पना करो तो  $f(y) = f(h + r)$ , और  $f(h + r)$  इस का मान,

$$f(y) = f(h) + f'(h)\frac{r}{1} + f''(h)\frac{r^2}{1 \cdot 2} + f'''(h)\frac{r^3}{2 \cdot 3} + \dots (१)$$

ऐसा होगा ।

यहाँ स्पष्ट है कि  $y$  के स्थान में यदि  $h$  का स्थापन दें तो  $f(h)$  का मान विदित हो जायगा पुनः  $f(h)$  के मान से  $f'(h)$ ,  $f''(h)$  इत्यादि मान भी प्रकट हो जायेंगे ।

(१) समीकरण में  $f'(h)\frac{r}{1}$ ,  $f''(h)\frac{r^2}{1 \cdot 2}$  इत्यादि में यदि किसी एक पद को उड़ाना हो तो  $f(h)$  पर से उसका मान निकाल उसे शून्य के तुल्य करने से अवश्य एक ऐसा  $h$  का मान आवेगा जिस पर से कि उस पद का मान उड़ जायगा ।

जैसे, कल्पना करो कि  $९y^3 + ४५y^2 + ७५y - १० = ०$  यह एक समीकरण है तो (१) से स्पष्ट है कि,

$$f(h) = ९h^3 + ४५h^2 + ७५h - १० ।$$

इस लिये,

$$f'(h) = २७h^2 + ९०h + ७५ ।$$

$$f''(h) = ५४h + ९० ।$$

$$f'''(h) = ५४ ।$$

$$f^{(4)}(h) = ० ।$$

और  $f(y) = f(h) + f'(h)\frac{r}{1} + f''(h)\frac{r^2}{1 \cdot 2} + f'''(h)\frac{r^3}{2 \cdot 3} + \dots$   
इस में मानो कि दूसरा घात  $r$  का अर्थात्  $f''(h)$  इसे उड़ाना है तो  $f'(h) = ० = ५४h + ९०$  ऐसा होगा,

इस लिये  $h = -\frac{x}{2}$  अब इस पर से  $f(h)$ ,  $f'(h)$  इत्यादि में चाहो जिस का मान ला सकते हो ।

टेडर के सिद्धान्त का व्यभिचार ।

२७ । कभी कभी टेडर के सिद्धान्त का (य के विशेष फलों में) व्यभिचार होता है क्योंकि टेडर के सिद्धान्त से  $f(y+c)$  इस का मान सर्वदा  $c$  के अभिन्न और धन यात में छाता है और सम्भव है कि ऐसा  $f(y)$  हो जिस पर से  $f(y+c)$  इस के मान में  $c$  का यात भिन्न वा शून्य हो ।

जैसे यदि  $f(y) = (y - k)^{\frac{m}{n}}$  तो  $f(y+c)$

$= (y - k + c)^{\frac{m}{n}}$  यहाँ स्पष्ट है कि यदि  $y = k$

तो  $f(y+c) = c^{\frac{m}{n}}$  ।

परन्तु जब,  $f(y) = (y - k)^{\frac{m}{n}}$

तो  $f'(y) = \frac{m}{n} (y - k)^{\frac{m}{n} - 1}$

$f''(y) = \frac{m}{n} \left( \frac{m}{n} - 1 \right) (y - k)^{\frac{m}{n} - 2}$

अब टेडर के सिद्धान्त से,

$f(y+c) = (y - k)^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} (y - k)^{\frac{m}{n} - 1} \cdot c + \dots$

$\dots + \frac{m}{n} \left( \frac{m}{n} - 1 \right) \dots (y - k)^{\frac{m}{n} - 2} c^2 + \dots$

यहाँ जब  $\frac{m}{n} < 2 > c - 1$  होगा तब सब पदों का मान अनन्त के समान होगा  $y = k$  ऐसा मानने से इस लिये बेसी दृशा में टेडर के सिद्धान्त का व्यभिचार हुआ ।

$$\text{इसी प्रकार यदि } f(y) = \frac{m}{(y-k)^n}$$

$$\text{तो } f(y+c) = \frac{m}{(y-k+c)^n} \text{ यहाँ यदि } y=k$$

तो  $f(y+c) = \frac{m}{c^n} = m \cdot c^{-n}$  परन्तु यदि टेलर के सिद्धान्त से यहाँ  $f(y+c)$  का मान छावो और उच्च में  $y=k$  के मानो तो प्रत्येक पद अनन्त के तुल्य होगा ।

इस लिये जब  $f(y)$  का मान शुद्धकरणी में हो या अनन्त के तुल्य हो किसी निश्चित  $y$  के मान में तो टेलर के सिद्धान्त का व्यभिचार होता है ।

२८ । इस प्रक्रम में स्मरणार्थ सब सिद्धान्तों को एकट्ठा कर लिखते हैं ।

(१) लेबनिज का सिद्धान्त,

$$\frac{f(y+c)}{f(y)} = 1 + \frac{f'(y)}{f(y)} \cdot c + \frac{f''(y)}{2! f(y)} \cdot \frac{c^2}{2} + \frac{f'''(y)}{3! f(y)} \cdot \frac{c^3}{6} + \dots + \frac{f^{(n)}(y)}{n! f(y)} \cdot \frac{c^n}{n!} + \dots$$

(२) म्याक्लारिन् का सिद्धान्त,

$$c = c_1 + c_2 \cdot \frac{y^2}{1 \cdot 2} + c_3 \cdot \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

यहाँ  $c = f'(y)$  यदि  $y=0$

$c_1 = f''(y)$  यदि  $y=0$

$c_2 = f'''(y)$  यदि  $y=0$  इत्यादि

(३) डेमाइधर का सिद्धान्त,

$$(f(y) \pm g(y) \sqrt{-1})^n = f(y) \pm g(y) \sqrt{-1}$$

(४) टेलर का सिद्धान्त,

$$f(y+c) = f(y) + f'(y) \frac{c}{1} + f''(y) \frac{c^2}{2 \cdot 2} + f'''(y) \frac{c^3}{3!} + \dots$$

( ५ ) टेलर के सिद्धान्त से किसी समीकरण में अज्ञातराशि का आसन्नमान,

$$y = k - \frac{f(k)}{f'(k)} \quad | \quad (y \text{ का अटकल से पहला मान} = k) .$$

यहाँ समीकरण का रूप ऐसा बनाना चाहिये जिस में  $f(y) = 0$  हो ।  
अभ्यास के लिये प्रश्न ।

( १ )  $r = \sqrt[3]{\frac{k - \sqrt{1-y^2}}{k-y}}$  इसका तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ?

$$\text{उत्तर } \frac{ता०र}{ता०य} = \frac{\sqrt{k^2 - \sqrt{1-y^2}}}{(k - \sqrt{1-y^2}) \sqrt{1-y^2}} .$$

( २ )  $r = \frac{25y^2 + 30y}{41}$  इसका दूसरा सम्बन्ध निकालो ? ।

$$\text{उत्तर } \frac{ता०र}{ता०य^2} = \frac{50}{41} .$$

( ३ )  $r = \sqrt[3]{\frac{y}{k}}$  इसका तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ?

$$\text{उत्तर} = \frac{ता०र^3}{ता०य^3} = \frac{1 + \frac{3y^2}{k^2 - y^2}}{(k^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

( ४ )  $r = \frac{3}{2+y^2}$  इसका चौथा तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ?

$$\text{उत्तर } \frac{ता०र}{ता०य^2} = 62 \frac{5y^2 - 20y^2 + 4}{(2+y^2)^4} .$$

( ५ )  $r = 2^{\frac{1}{n}} \cdot ज्याय$  इसका न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ?

$$\text{उत्तर } \frac{ता०र}{ता०य^n} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot ज्याय \left( y + \frac{न०}{y} \right) .$$

( ६ )  $y = क \cdot कोज्याप + अ \cdot ज्याप$  और  $r = क \cdot ज्याप - अ \cdot कोज्याप$   
तो सिद्ध करो कि यदि न विषम हो तो

$$\frac{ता०य}{ता०य^n} \times \frac{ता०र}{ता०य^n} = ज्याय \left( \frac{अ^2 - क^2}{2} \right) + अक \cdot कोज्या २प .$$

(७)  $y \cdot \text{लाय} = r$ , इसका तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ?

$$\text{उत्तर } \frac{\text{ता}^3 r}{\text{ताय}^3} = -\frac{r}{y^2} ।$$

(८)  $\text{ज्याय} \cdot \text{लाय} = r$ , इसका दूसरा सम्बन्ध निकालो ।

$$\text{उत्तर } \frac{\text{ता}^2 r}{\text{ताय}^2} = \frac{r \cdot \text{कोज्याय}}{y} - r - \frac{\text{ज्याय}}{y^2} ।$$

(९)  $r = y^n \cdot \text{लाय}$  तो सिद्ध करो कि  $\frac{\text{ता}^{n+1} r}{\text{ताय}^{n+1}} = \frac{n}{y}$

(१०)  $r = \text{ज्या } 2y + \text{स्प } 2y$  तो दूसरा सम्बन्ध क्या होगा ?

$$\text{उत्तर } \frac{r}{\text{ताय}^2} \left( \frac{2 \text{स्प} 2y}{\text{कोज्या}^2 2y} - \text{ज्या } 2y \right) = \frac{\text{ता}^2 r}{\text{ताय}^2} ।$$

(११) यदि  $r = \text{कोज्याय} \cdot \text{ज्या } 3y$  तो न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ?

$$\text{उत्तर, } \frac{\text{ता}^n r}{\text{ताय}^n} =$$

$$2^{n-1} \left\{ \text{ज्या} \left( 2y + \frac{n \cdot \pi}{2} \right) + 2^n \cdot \text{ज्या} \left( 4y + \frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\} ।$$

(१२) यदि  $r = 4 \text{ज्याय} \cdot \text{ज्या } 3y + \text{ज्या } 4y$  तो न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ?

$$\text{उत्तर, } \frac{\text{ता}^n r}{\text{ताय}^n} = 2^n \left\{ \text{ज्या} \left( 2y + \frac{n \cdot \pi}{2} \right) + 3^n \text{ज्या} \left( 4y + \frac{n \cdot \pi}{2} \right) + 4^n (-1)^n \cdot \text{ज्या} \left( \pi \frac{n+4}{2} - 4y \right) \right\} ।$$

(१३)  $r = \text{ज्याय} \cdot \text{कोज्याय}$  तो लेघूनिज के सिद्धान्त से

$$\text{सिद्ध करो कि } 2^{n-1} \cdot \text{ज्या} \left( 2y + \frac{\pi \cdot n}{2} \right)$$

$$= \text{कोज्याय} \cdot \text{ज्या} \left( y + \frac{n \cdot \pi}{2} \right) + n \cdot \text{ज्या} \left( y + \frac{\pi \cdot n - 1}{2} \right) \cdot \text{कोज्या} \left( y + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot ज्या \left( y + \pi \frac{n-2}{2} \right) \cdot कोज्या \left( y + \frac{2\pi}{2} \right) \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ज्या \left( y + \pi \frac{n-3}{2} \right) \cdot कोज्या \left( y + \frac{3\pi}{2} \right) \\
 &+ \dots + ज्याय \cdot कोज्या \left( y + \frac{n \cdot \pi}{2} \right) ।
 \end{aligned}$$

(१४)  $r = इ^y$ , ज्याय तो सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
 \frac{ता^n र}{ताय^n} = इ^y \left\{ ज्याय + n \cdot ज्या \left( y + \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
 \left. + \frac{n(n-1)}{2} ज्या \left( y + \frac{2\pi}{2} \right) + \dots \right\} ।
 \end{aligned}$$

(१५)  $r = य^n$ , इ^y तो सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
 \frac{ता^n र}{ताय^n} = इ^y \cdot n \left\{ 1 + n \cdot य + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} य^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 3} य^3 \right. \\
 \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 4} य^4 + \dots \right\} ।
 \end{aligned}$$

(१६)  $r = ज्याय$  तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{2n} र}{ताय^{2n}} = r \text{ ( यदि } n \text{ समसंख्या है ) ।}$$

(१७)  $r = र$  (लाय), इसका सात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ।

$$\text{सत्तर } \frac{र^2 + 1}{य} = \frac{वार}{ताय} ।$$

(१८)  $r = अ \cdot क \cdot र$   $य + क$  तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^n र}{ताय^n} =$$

$$\begin{aligned}
 \frac{क}{अ} \frac{न-1}{2} कोज्या \left\{ \left( न \cdot र \cdot य + क \right) + (न-1) \frac{\pi}{2} \right\} \\
 \left\{ कोज्या^n \left( र \cdot य + क \right) \right\} ।
 \end{aligned}$$



(१९)  $y = m \cdot x^n (r - ny)$  इस में  $y$  के घातवृद्धि में  $r$  का मान निकालो ?

$$\text{उत्तर, } r = \left(n + \frac{1}{m}\right)y - \frac{1}{3m^3} \cdot y^3 + \frac{1}{5m^5} \cdot y^5 - \dots$$

(२०)  $y = m \cdot x^n (r + ny)$  यहाँ  $r$  का  $y$  घातवृद्धि में क्या मान है ?

$$\text{उत्तर } r = \left(\frac{1}{m} - n\right)y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3m^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^5}{5m^5} + \dots$$

(२१)  $3 \cdot x^n + 2$  इस का लघुरिक्त  $y$  के घातवृद्धि में लावो ?

$$\text{उत्तर ला } (3x^n + 2) = ला_0 + \frac{3}{2}y + \frac{3}{24}y^2 - \frac{1}{120}y^3 \text{ इत्यादि ।}$$

(२२)  $x^y = r$ , यहाँ  $r$  का मान  $y$  के घातवृद्धि में लावो ?

$$\text{उत्तर } r = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}y^3 + \dots$$

(२३) ला  $(1 + x^y)$  इस का मान  $y$  के घातवृद्धि में लावो ?

$$\text{उत्तर ला } (1 + x^y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{2y^3}{3} - \dots$$

(२४) ला  $(x^y)$  इस का मान सिद्ध करो कि

$$- \left\{ 2x^{\frac{\pi}{8} - \frac{y}{2}} + 2x^{\frac{\pi}{8} - \frac{y}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{\pi}{8} - \frac{y}{2}} + \frac{16}{8}x^{\frac{\pi}{8} - \frac{y}{2}} + x^{\frac{\pi}{8} - \frac{y}{2}} + \dots \right\}$$

ऐसा होगा ? ।

(२५)  $(x^y)^n = r$  इस का मान  $y$  के घातवृद्धि में लावो ?

$$\text{उत्तर } r = x^n \left\{ 1 - n \frac{y^2}{2} + \frac{n(n-2)}{3} \cdot \frac{y^4}{24} - \dots \right\}$$

(२६)  $r = ला \{ 1 + (y^2 + k \cdot y) \}$  इस का मान  $y$  के घातवृद्धि में लावो ?

$$\text{उत्तर, ला } \{ 1 + (y^2 + k \cdot y) \}$$

$$= क \cdot य + (२ - क^२) \frac{य^२}{२} + क (क^२ - ३) \frac{य^३}{३} + \dots \dots \dots ।$$

(२७) ला {क(य + [१ + य²]²)} इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ? ।

$$\begin{aligned} \text{उत्तर, ला}\{क(य + [१ + य²]²)\} \\ = लाक + य - \frac{य^३}{२ \cdot ३} + \frac{१ \cdot ३}{२ \cdot ४ \cdot ५} \cdot य^५ - \dots । \end{aligned}$$

(२८) ला (१ + ज्याय) इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ? ।

$$\text{उत्तर ला (१ + ज्याय)} = \frac{य^२}{२} - \frac{य^४}{३} + \frac{२३}{५} \cdot \frac{य^६}{५} - \dots \dots \dots ।$$

(२९) ला (छेय) इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ? ।

$$\text{उत्तर ला (छेय)} = \frac{य^२}{२} + \frac{य^४}{३ \cdot ४} + \dots \dots \dots ।$$

(३०) ला<sub>य</sub> = (य<sup>३</sup> - य<sup>-३</sup>) - ३(य<sup>२</sup> - य<sup>-२</sup>) + ३(य<sup>३</sup> - य<sup>-३</sup>) - ३(य<sup>४</sup> - य<sup>-४</sup>) + ... इसे सिद्ध कर

तब इसी पर से सिद्ध करो कि

$$\text{ज्याय} = ३(य + ज्या२य) - ३(ज्या३य + ३(ज्या४य - ३(ज्या५य + \dots ।$$

(३१) तीसरे प्रश्न पर से इसे सिद्ध करो कि,

$$\text{कोज्याय} = ३ + कोज्या२य - कोज्या३य + कोज्या४य - कोज्या ५ य + \dots$$

(३२)  $\frac{य^n \cdot ला (य^२ + य + १)}{न + १}$  इसे यदि म्यात्कारिन् के सिद्धान्त

से य के घातवृद्धि में लायें तो पहले पद का क्या प्रमाण होगा ? ।

$$\text{उत्तर } \frac{य^{n+1}}{न + १} ।$$

(३३) य<sup>३</sup>ज्या<sup>-३</sup>य<sup>४</sup>स्य<sup>-४</sup>य इसे म्यात्कारिन् के सिद्धान्त से य के घातवृद्धि में लायें तो तीसरे पद का क्या प्रमाण होगा ? ।

$$\text{उत्तर } \frac{१५८य^७}{६} ।$$

(३४)  $\sqrt{1-x}$  को ज्याय इस का मान  $x$  के घातवृद्धि में लावो ? ।

$$\text{उत्तर } \sqrt{1-x} \left\{ \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2 \cdot 4} + \frac{y^5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \dots \right\} ।$$

(३५) यदि चाप ( $y$ ) बहुत छोटा हो तो सिद्ध करो कि  $y = \sqrt[3]{2}$  (स्यय - ज्याय) स्वल्पान्तर से ।

(३६) डेमाइवर के सिद्धान्त से यह सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \text{कोज्या}^m y \mp \frac{m(m-1)}{2} \cdot \text{कोज्या}^{m-2} y \cdot \text{ज्या}^2 y \\ \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4} \text{कोज्या}^{m-4} y \cdot \text{ज्या}^4 y \\ \mp \dots + (-1)^{\frac{m}{2}} \text{ज्या}^m y = \text{कोज्या}^m y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{और } \pm m \cdot \text{कोज्या}^{m-1} y \cdot \text{ज्या} y \mp \frac{m(m-1)(m-2)}{3} \cdot \text{कोज्या}^{m-3} y \cdot \text{ज्या}^3 y \\ \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5} \cdot \text{कोज्या}^{m-5} y \cdot \text{ज्या}^5 y \mp \dots = \pm \text{ज्या}^m y \end{aligned}$$

( यहाँ  $m$  सम संख्या है ) ।

( ३७ ) सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2-1} + \dots ।$$

( ३८ ) सिद्ध करो कि

$$\pi \frac{5\pi+1}{2\pi-1} = 2^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \right\} ।$$

( ३९ ) सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \dots ।$$

( ४० ) सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi^2}{15} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \right\} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots \right\} ।$$

(४१) यदि  $y$  बहुत छोटा हो तो सिद्ध करो कि

$$\csc y = 1 + \frac{y^2}{6} \text{ स्वल्पान्तर से ।}$$

(४२) टेलर के सिद्धान्त से यह सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \csc^{-1} y &= \csc^{-1} y + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{y^3}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1+2y^2}{(1-y^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{y^3}{6} + \frac{3y(3+2y^2)}{(1-y^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot \frac{y^5}{24} + \dots \end{aligned}$$

(४३) यदि  $r = \cos^{-1}(y + z)$  तो सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} r &= \cos^{-1}(1-y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{z}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{y}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{z^2}{2} \\ &- \frac{1+2y^2}{(1-y^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{z^3}{6} - \frac{3y(3+2y^2)}{(1-y^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot \frac{z^5}{24} - \dots \end{aligned}$$

(४४) यह सिद्ध करो कि

$$\csc(y+z) = \csc y + \csc^2 y \cdot \csc y \cdot z + \csc^3 y (1 + \csc^2 y) \cdot \frac{z^2}{2} + \dots$$

(४५) यह सिद्ध करो कि

$$\csc^{-1}(y+z) = \csc^{-1} \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} + \frac{z}{y\sqrt{y^2-1}} + \frac{1-2y^2}{y^2\sqrt{y^2-1}} \cdot \frac{z^2}{2} + \dots$$

(४६) टेलर के सिद्धान्त से पहले सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \sec^{-1}(y+z) &= \sec^{-1} y + z \cdot \csc^2 y - \frac{z^2}{2} \cdot \csc^4 y + \csc^2 y \\ &+ \frac{z^3}{3} \csc^6 y - \csc^4 y - \frac{z^5}{8} \cdot \csc^8 y + \csc^6 y + \dots \end{aligned}$$

(यहां  $p = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} y$ ) तब इस पर से यह सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \sec^{-1} y &= \csc^{-1} y + \frac{\csc^2 y \cdot \csc^2 y}{2} + \frac{\csc^4 y \cdot \csc^2 y}{3} \\ &+ \frac{\csc^6 y \cdot \csc^4 y}{4} + \dots \end{aligned}$$

(४७) यदि  $r = f(y)$  तो सिद्ध करो कि

$$f\left(\frac{xy}{y}\right) = r + \frac{tar}{ताय} \cdot \frac{४y}{५} + \frac{ता^२r}{ताय^२} \cdot \frac{१६}{२५} \cdot \frac{y^२}{|२} + \frac{ता^३r}{ताय^३} \cdot \frac{६४}{१२५} \cdot \frac{y^३}{|३} + \dots$$

(४८)  $r = f(y)$  और  $f(a - y) = s$  तो सिद्ध करो कि,

$$r = s + \frac{तास}{ताय} (२y - अ) + \frac{ता^२स}{ताय^२} (२y - अ)^२ \cdot \frac{१}{|२} + \frac{ता^३स}{ताय^३} (२y - अ)^३ \cdot \frac{१}{|३} - \dots$$

(४९)  $\sqrt{y^३ + १४y^२ - २८८}$  इसे यदि टैलर के सिद्धान्त में  $f(y)$  कल्पना करें उस पर से  $f(y + ४)$  इस का मान लावें तो  $y$  किस के तुल्य करने से टैलर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा ?

$$\text{उत्तर } \begin{cases} y = -१२। \\ y = +४। \\ y = -६। \end{cases}$$

(५०)  $y^५ - y = y^५ + १५$  इस समीकरण में  $y$  का एक मान कौन है ?

$$\text{उत्तर } y = २\sqrt[३]{६}।$$

(५१)  $२y^३ + ३y^२ + २y = ८८$  इस में  $y$  का एक मान कौन है ?

$$\text{उत्तर } y = ३\sqrt[४]{४}।$$

(५२) एक जात्यत्रिभुज का क्षेत्रफल  $३०\frac{३}{४}$  और भुजकर्ण का अन्तर  $८$  है तो भुज, कोटि और कर्ण का पृथक् पृथक् क्या मान होगा ?

$$\text{उत्तर भु} = ५\frac{१२१}{१८४०} \text{ को} = १२\frac{३८८}{९३२१} \text{ कर्ण} = १३\frac{१२१}{१८४०} \text{ स्वल्पान्तर से।}$$

(५३) एक काशीवासी को मथुरावृन्दावन जाने की इच्छा हुई उसने मार्ग चलने का नियम अपने मन में यह ठहराया कि पहले दिन एक कोश दूसरे दिन सोलह कोश तीसरे दिन ८१ कोश य दिन में  $y^५$  कोश चलेंगे परन्तु दूसरे क्षण में विचारा कि नही ऐसे चलने में कष्ट होगा य दिन के अन्त्य में एकरूप से एक दिन में चलने की जो गति हो उस गति से प्रतिदिन चलेंगे पुनः तीसरे क्षण में विचारा कि

नहीं इस गति की जो गति एक दिन में एकरूप से होगी उस गति से चलेंगे इसी प्रकार उस पुरुष ने दो बार और शोचा तो वताओ अन्त्य में वह मथुरावृन्दावन गया कि नहीं ? उत्तर, नहीं ।

(५४) एक साहु ने एक पुरुष को इस नियम पर रक्ता कि पहले वर्ष में ५ रुपये दूसरे वर्ष में ३६ रुपये य वर्ष में  $y^2 + ४$  रुपये तुमको मिलेंगे तुम हमारे यहाँ काम किया करो । य वर्ष के अनन्तर उस पुरुष ने कुछ अपराध किया इस लिये उस साहु ने कहा कि अब पिछले वर्ष के अन्त्य में जो तुमारे तनखाह का एकचाल से एक वर्ष में बढ़ने का प्रमाण है उतना इस वर्ष में ढूँगा और दूसरे वर्ष में पिछली तनखाह का एकचाल से जो एक वर्ष में गति हो उतना ढूँगा याँ प्रतिवर्ष में पिछली तनखाह के गतितुल्य तनखाह उस साहु ने देना नियत किया । अन्त्य में उस पुरुष ने विचारा कि नियमानुसार अब इस वर्ष के अन्त्य में साहु जी मुझे छोड़ावेंगे तो इससे अच्छा कि पहले ही से मैं छोड़ूँ इस लिये उसने छ महीना काम कर अपनी नौकरी को छोड़ा तो बचावो कि नौकरी छोड़ती समय उस पुरुष ने कितना रुपया पाया ?

उत्तर ६०) रुपये ।

इति चतुर्थाध्याय ।